

Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations

Luc Trouche

▶ **To cite this version:**

Luc Trouche. Construction et conduite des instruments dans les apprentissages mathématiques : nécessité des orchestrations. 2003. hal-00190091

HAL Id: hal-00190091

https://telearn.hal.science/hal-00190091

Submitted on 23 Nov 2007

HAL is a multi-disciplinary open access archive for the deposit and dissemination of scientific research documents, whether they are published or not. The documents may come from teaching and research institutions in France or abroad, or from public or private research centers.

L'archive ouverte pluridisciplinaire **HAL**, est destinée au dépôt et à la diffusion de documents scientifiques de niveau recherche, publiés ou non, émanant des établissements d'enseignement et de recherche français ou étrangers, des laboratoires publics ou privés.

Document pour l'Habilitation à Diriger des Recherches
Université Paris VII, novembre 2003

Construction et conduite des *instruments* dans les apprentissages mathématiques : nécessité des *orchestrations*



Fernand Léger, 1920. Le remorqueur (musée de Grenoble)
Ce tableau célèbre la beauté de l'homme uni à la machine, dans une vision équilibrée, allègre et optimiste (Changeux 2002)

Luc TROUCHE
Département de mathématiques et IREM
Université Montpellier II

Edition de l'IREM, Université Montpellier II, cc 040, 34095 Montpellier cedex

HABILITATION A DIRIGER DES RECHERCHES

Soutenue le 21 novembre 2003, Université Paris VII, devant le jury composé de⊡

MICHELE ARTIGUE
Professeure, Paris VII, directrice de recherche
HEDY ATTOUCH
Professeur, Montpellier II
DOMINIQUE GUIN
Professeure, Montpellier II, présidente du jury
CAROLYN KIERAN
Professeure, UQAM Montréal, rapporteur
COLETTE LABORDE
Professeure, IUFM de Grenoble, rapporteur
JEAN-BAPTISTE LAGRANGE
Professeur, IUFM de Reims
PIERRE RABARDEL
Professeur, Paris VIII

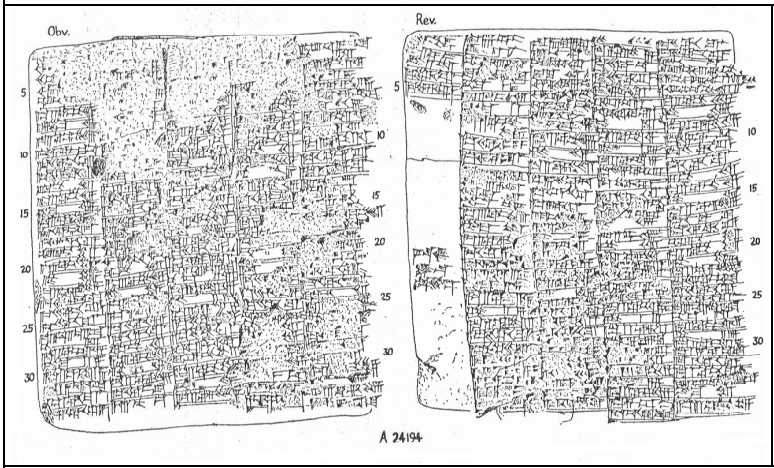
À Marie, Pierre et Marie-Maguelone



Van Gogh utilise des roseaux, taillés comme une plume d'oie. Le roseau *devient l'instrument* de ses dessins. Il lui donne la *possibilité* de creuser ses feuilles et de forcer les contours. Cet *outil* lui permet d'imiter le *geste* large des peintres japonais, qui n'utilisent pas le roseau, mais le pinceau. Particulièrement souple, le roseau donne naissance à une *manière de faire*, que traduit tout un vocabulaire de *signes* : pointillés, hachurés, arrondis et surtout les tourbillons qui deviennent une des *techniques* majeures du peintre » (Exposition Van Gogh 2003, Arles)

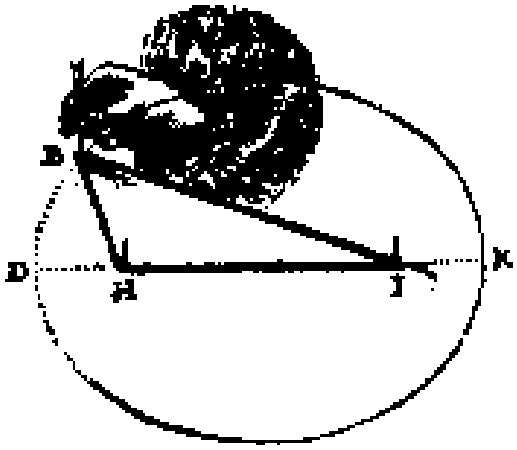
Artefacts pour les mathématiques, florilège

La table de problèmes, -2000



Tablette recto-verso, 10cm x 10cm, époque dite babylonienne. Elle contient 247 problèmes, son texte est extrêmement synthétique et structuré (5 niveaux d'arborescence).
Neugebauer, Otto, and Abraham J. Sachs, 1945
Mathematical Cuneiform Texts, Vol. 29, American Oriental Studies. New Haven : American Oriental Society

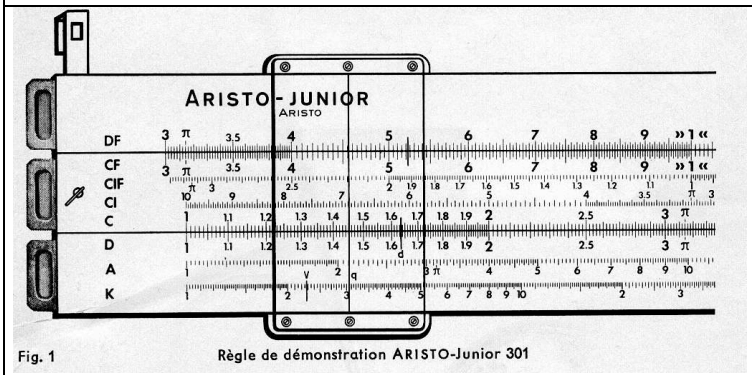
Le fil à ellipse, 1637



L'ellipse est une ligne courbe que j'ai vu dessiner par les jardiniers dans leurs parterres, où ils la décrivent d'une façon fort grossière, mais qui fait mieux comprendre sa nature.

Descartes, 1637
La Dioptrique, Discours VIII

La règle à calcul, 1971



Pour le professeur formé aux rigueurs de la discipline mathématique, l'introduction de la règle à calcul dès les classes moyennes peut poser un vrai cas de conscience

Bieber 1971
Aristo, Bulletin d'information pour le corps enseignant

CONSTRUCTION ET CONDUITE DES *INSTRUMENTS* DANS LES APPRENTISSAGES MATHEMATIQUES : NECESSITE DES *ORCHESTRATIONS*

Pierre Janet (Les débuts de l'intelligence 1932) voyait dans la conduite du panier l'origine de l'intelligence humaine… Qu'est-ce qu'un panier – ou une caisse flottante ? Une chose étonnante. Un artefact (à l'origine en vannerie) qui sert : 1/ à concentrer l'éparpillé, en faisant de l'un avec du multiple, 2/ à véhiculer le tout d'un point à un autre (Debray 2001).

Les termes *outil* et *instrument* sont polysémiques ; ils ont cependant une fonction clairement assignée par l'usage, dans les différents contextes où ils interviennent. On parle des *outils* du maçon et du jardinier, mais des *instruments* du chirurgien et de l'astronome. La différence entre les deux mots ne tient pas seulement à une différence de *statut* de métier : on évoque ainsi les *outils* de la pensée et les *instruments* aratoires. Le dictionnaire (Le Robert 1986) souligne la proximité des deux mots : *le mot outil, comme le mot instrument, implique, d'une manière générale et théorique, l'idée d'un objet mû directement par la seule main de l'exécutant.* (Simondon 1989) propose une distinction entre les deux termes : (…) *on entend par* ***outil*** *l'objet technique qui permet de prolonger et d'armer le corps pour accomplir un* ***geste****, et par* ***instrument*** *l'objet technique qui permet de prolonger et d'adapter le corps pour obtenir une meilleure perception. Certains objets techniques sont à la fois des outils et des instruments, mais on peut les dénommer outils ou instruments selon la prédominance de la fonction active et de la fonction perceptive.*

Cette distinction est peu satisfaisante, tant les fonctions de perception et d'action sont liées, en particulier dans le travail mathématique : une calculatrice, par exemple, est le lieu de *gestes* qui donnent accès à des représentations graphiques et permettent de les modifier. Je propose ici de distinguer trois niveaux, à partir des *relations* entre l'usager et l'objet technique :

- j'utilise le mot *artefact* pour désigner *un objet technique nu*, indépendamment de toute relation avec un usager (un artefact peut être une calculatrice, une notation, un compas ou un panier, cf. la citation introductive de ce document) ;

- j'utilise le mot *outil* pour désigner *un objet technique intégré, ou susceptible d'être intégré* par un usager dans ses gestes (scolaires, professionnels ou quotidiens) ; dans le même sens d'objet manipulable dans leur matérialité, j'utiliserai aussi le mot *d'ostensif* (§ 3.1) ;

- j'utilise le mot *instrument* pour désigner *une entité mixte composée de l'objet technique et des modes d'utilisation* construits par un usager (je préciserai ceci § 2).

Quand il s'agit d'évoquer les *contraintes* et les *potentialités* liées à un objet technique, je parle plutôt d'outil, puisque ces contraintes et ces potentialités font référence à une *actualisation* (au sens de passage de la puissance à l'acte) possible, pour un utilisateur virtuel.

Une calculatrice est ainsi, intrinsèquement, un artefact. Elle ne peut sans doute pas être considérée comme un outil pour un enfant de deux ans. Par contre je dirai qu'elle est un outil pour un élève de lycée. Deux calculatrices identiques sont des outils identiques pour deux élèves donnés, mais elles donneront *matière* à des instruments différents.

Mon étude porte précisément sur les processus à travers lesquels un *artefact*, *reconnu* virtuellement *par une institution* (§ 2.1) comme un *outil* pour les apprentissages mathématiques, se *réalise* en *instrument* et sur la façon dont ces processus pourraient être efficacement *guidés* par l'institution scolaire. Cette étude prend une importance certaine dans un moment de foisonnement technologique qui touche particulièrement les apprentissages et les enseignements mathématiques.

1) Outils et prothèses

1.1 Un *développement des outils* qui est constitutif de l'humain

Il peut paraître paradoxal de soutenir que ce qui fait l'homme est extérieur à lui. Et pourtant□ *le don de la prothèse fait l'humain de l'homme, lequel s'humanise en extériorisant ses facultés dans un processus d'objectivation sans fin (sans arrêt ni but). Le sujet se constitue comme humain avec et dans l'objet. L'invention technique, qui met l'autre dans le même, permet la succession cumulative qu'on nomme «□culture□. Elle ne cesse de susciter des mondes nouveaux* (Debray 2001). Ce qui distingue l'homme de l'animal, ce n'est pas la capacité de créer *un* outil, matériel ou symbolique, mais la *succession cumulative* d'un appareillage de connaissance et de transformation du monde. Cet appareillage est lié aux *médiations* constitutives de tout processus de travail, de formation ou d'apprentissage (Vygotski 1934). La *combinaison des outils* (la roue et l'écriture, la règle et l'équerre, la calculatrice et le calcul mental) suscite de nouveaux□outils : les outils font *engrenage*.

1.2 Une modification profonde des *rapports* entre les individus et les outils

On peut distinguer dans l'histoire des outils des évolutions et des ruptures□

- un mouvement permanent de *miniaturisation* et de *dématérialisation* des supports□(du document gravé ou document écrit, puis imprimé, enfin numérisé), qui peut être découpé en plusieurs âges□ tribal, scribal puis néo-tribal électronique (McLuhan 1967) ou logosphère, graphosphère puis vidéosphère (Debray 1992), les *images* et les *écrans* tendant à remplacer dans cette dernière période les écrits et les livres□

- une évolution qui va des outils liés à des espaces de travail ou d'activité vers des *prothèses*, c'est-à-dire des outils liés aux personnes mêmes : le passage des configurations fixes aux configurations portables (calculateur, ordinateur, téléphone) a des effets importants. Ces outils prennent en charge des fonctions simples (stockage de mémoire ou traitement d'opérations élémentaires) qui étaient jusqu'à présent réalisées de façon autonome par les individus□

- un embarquement récent, à l'intérieur du même artefact, de fonctions de plus en plus diversifiées (un même artefact remplace l'agenda, le téléphone, la calculatrice…). Une même enveloppe regroupe en fait un *ensemble d'outils*□ c'est particulièrement manifeste pour les calculatrices symboliques (Guin & Trouche 2002). Il s'agit parfois de regroupements *d'outils hétérogènes*, c'est-à-dire relatifs à des tâches de natures différentes (par exemple téléphoner et photographier)□

- une évolution radicale dans la perception relative du corps et des outils□ *nous sommes confrontés aujourd'hui à de multiples ruptures anthropologiques. La première, qui remonte à la renaissance et au début de l'anatomie, a consisté à ouvrir le corps de l'homme sans se*

poser de questions éthiques, c'est-à-dire avec le seul souci de faire progresser la connaissance de la médecine. La seconde rupture vient avec les greffes, cet échangisme des organes qui conduit l'homme à se regarder autrement : la vision du corps devient essentiellement instrumentale (Le Breton 2002). Les mythes anciens, figurés par Faust et Frankenstein (Lecourt 1996), prennent, si l'on peut dire, corps. Les frontières entre le corps et ses prothèses, entre le naturel et l'artefactuel, s'estompent ;

- une évolution vers la *fétichisation* des artefacts, comme le constate Sfez (2002) : *Internet : un fétiche. De l'objet fétiche, en effet, il a les traits suivants : il est une partie valant pour le tout, dont il résume et « compacte » les caractéristiques ; il est petit, donc maniable, manipulable ; en tant que tel, il peut être sans cesse touché, modifié, emporté, on l'emmène partout avec soi. Il fait dès lors partie de l'individu, qui le considère comme un second soi.* Ce qui est dit d'Internet peut se transposer aisément aux téléphones portables ou aux calculatrices complexes ;

- une évolution récente des métaphores technologiques, de l'*arme de jet* vers le *filet*. On retrouve, avec la notion de réseau, la confusion entre corps et outils : Parrochia (1993) relève *l'analogie entre la circulation des flots de données dans le réseau et celle du sang humain, l'horloge constituant alors le « cœur du système »*. Mais l'élément le plus important est sans doute dans les nouveaux modes de travail induits par le web, la toile ou le réseau : *ce qui est intéressant avec le réseau et ses capacités de « coordination décentralisée », c'est qu'on peut pénétrer à n'importe quel endroit du maillage. Du moins dans le versant « anarchique » du réseau, car il ne faut pas oublier les hiérarchies qui existent aussi là. En somme, si l'information peut pénétrer à tout endroit du maillage, il s'en faut de beaucoup pour qu'elle soit traitée, c'est-à-dire sélectionnée, triée vers une décision* (Sfez 2002). Avec le réseau, vient aussi la notion *d'interactivité* : l'action n'est plus à sens unique, l'artefact est censé produire une rétroaction ;

- une évolution de la place des sciences, des techniques et des technologies dans l'imaginaire collectif. Au cours du XXe siècle, sciences et techniques ont été associées à l'idée de progrès (que l'on se souvienne seulement de la définition par Lénine du socialisme : les soviets et l'électricité). On peut repérer à la fin du XXe siècle des éléments nouveaux : la perception commune d'une société informatisée et les craintes qu'elle suscite (le « bug de l'an 2000 » en était une illustration), plus généralement la perception des dangers que ferait courir à l'humanité un développement sans conscience de la science (les mobilisations autour de l'énergie nucléaire, puis des OGM, en sont de bons exemples). En un siècle, du point de vue imaginaire, le rapport aux sciences et techniques est passé du rêve (dont les romans de Jules Verne constituent un bon exemple) à la méfiance. Au vœu politique de la nécessité d'une maîtrise, par tous, des nouvelles technologies (illustré par le plan du gouvernement français *Informatique pour Tous* en 1985) répond une exigence, portée par des mobilisations populaires, d'un *contrôle social sur la technologie.*

1.3 Les outils (symboliques et matériels) dans le *travail mathématique*, développement et résistances

Sfez (2002) montre les statuts différents, depuis Platon, du *savant* et de *l'ingénieur*, de la *profession* et du *métier*, de *l'invention* et de *l'innovation*, de la *maïeutique* et de l'*apprentissage*. Ces oppositions se lisent particulièrement bien au sein des mathématiques, vues comme parangon des sciences pures (mathématique, de *mathêma*□science)□

- les mathématiques, au niveau de leur pratique, de leur enseignement et de leur apprentissage, entretiennent un rapport ambivalent avec l'«□écriture□». D'un côté la culture mathématique est une culture de l'écrit□ *ce qui distingue le mathématicien des autres scientifiques est une mémoire plus longue. Un article de physique, de chimie ou de biologie est périmé au bout de cinq ans. Les mathématiciens se réfèrent encore aux travaux d'Euler (vers 1750), de Riemann (vers 1850), d'Hermann Weil (vers 1920). Les mathématiciens participent à la civilisation du Livre, sans doute parce qu'une part importante de leur travail est normative et dénominationnelle* (Cartier & Chemla 2000)□ de l'autre côté, la culture mathématique est une culture de la rhétorique et de la pensée pure□ en évoquant Platon, Rousseau et Saussure, Chevallard (1996) montre ainsi *la condition dépendante, ancillaire, seconde de l'écriture*, qui ne fait que *représenter* le langage, qui, lui-même, *exprime* la pensée□

- alors que le calcul est omniprésent dans les pratiques mathématiques *(il en est une composante essentielle à tous les niveaux, inséparable des raisonnements qui le guident ou en sens inverse il outille* (Kahane 2002)), on observe, dans la culture et l'enseignement, une certaine dévalorisation du calcul (numérique ou algébrique) par rapport au raisonnement. (Chevallard 1996) cite ainsi Alain□ *puisqu'une machine à compter est possible, une machine à raisonner est possible. Et l'algèbre est déjà une sorte de machine à raisonner□ vous tournez la manivelle, et vous obtenez sans fatigue un résultat auquel la pensée n'arriverait qu'avec des peines infinies. L'algèbre ressemble à un tunnel□ vous passez sous la montagne, sans vous occuper des villages et des chemins tournants□ vous êtes de l'autre côté, et vous n'avez rien vu (…). Les nombres sont des mécaniques en un sens. J'ajoute un, et encore un□ le comptable joint et sépare comme le mécanicien joint et sépare□ il forme total, produit et quotient□ en quoi il ne pense point du tout□ et, ce qui le prouve, c'est qu'une machine à compter formera total, produit, quotient, bien mieux que le comptable, et sans former aucun nombre véritable, ajoutant ou retranchant un et encore un par l'effet d'une roue dentée, d'un doigt de fer, d'un butoir, d'une vis*. Il semble exister en fait une hiérarchie culturelle de valeurs, du calcul numérique approché au calcul numérique exact, puis au calcul algébrique et enfin au «□raisonnement□»□

- depuis les cailloux et les bouliers, la règle et le compas, les outils ont toujours fait partie de la pratique mathématique et ont été intégrés *jusqu'à un certain point* et *jusqu'à une date récente* dans l'enseignement. Jusqu'à un certain point, parce que *les quelques instruments matériels utilisés (…) sont généralement considérés comme de simples supports, des aides parfois indispensables, mais qui ne sauraient en aucun cas faire partie de l'activité elle-même* (Bosch & Chevallard 1999). Jusqu'à une date récente, parce que le système

d'enseignement est très sensible à l'introduction de nouveaux outils[1] et que, dans la dernière partie du XXe siècle, le développement rapide des technologies informatiques et son effet sur les mathématiques elles-mêmes (Rauzy, in Cornu 1992) ont déstabilisé les rapports que l'enseignement des mathématiques entretenait avec les outils de calcul (Kahane 2002). Chevallard (1992) constate ainsi l'écart entre la pénétration *sociale* et la pénétration *scolaire* des outils informatiques. Ce n'est pas faute de sollicitation institutionnelle, mais c'est une réalité du terrain scolaire, constatée dans tous les pays où ces technologies sont disponibles (Guin & Trouche 2002). On peut même soutenir que, plus les outils « embarquent » de connaissances, plus leur légitimité scolaire est contestée. Ceci est vrai pour toutes les NTIC, c'est encore plus vrai pour les systèmes de calcul formel qui vont à l'encontre de trois valorisations culturellement « naturelles » : le discours privilégié par rapport à l'écrit, le raisonnement privilégié par rapport au calcul, ce qui se fait de façon autonome privilégié par rapport à ce que se fait avec prothèse. D'un calcul sans calculatrice, on dit d'ailleurs qu'il se fait *de tête* ou *à la main*, expressions qui qualifient, en creux, le calcul avec calculatrice.

1.4 Une matière à recherches

L'impact des TICE pour l'apprentissage et l'enseignement des mathématiques prend, à partir des années 1980, une grande place dans la littérature corporative, pédagogique et de recherche (Collectif CNCRE 2000), pour au moins trois raisons :

- les potentialités des nouveaux outils (Cornu 1992, Trouche 2000a) ;
- l'évolution de l'équipement des élèves : les calculatrices scientifiques puis graphiques se généralisent dans les classes, Guin & Trouche 2002) ;
- les injonctions institutionnelles (§1.3).

Les premiers discours sont très optimistes (Penglase & Arnold 1996), marqués par la conviction d'un apport naturellement positif pour l'apprentissage et l'enseignement : l'environnement permet de voir, *donc* de comprendre ; prenant en charge la partie *technique* de la tâche, il permet une centration sur la partie *conceptuelle* (Kutzler 1994).

Ces discours évoluent dans les années 1990, à partir de l'analyse des *usages* des calculatrices, largement répandues dans les *classes ordinaires* et à partir d'une mise en œuvre des EIAO dans un cadre *institutionnel* (et non plus en laboratoire c'est-à-dire *en dehors* des activités traditionnelles d'une classe). L'étude des conditions de *viabilité* des outils Chevallard (in Cornu 1992) fait surgir quatre types de questions :

i) Des questions relatives au *statut* des outils de calcul : je mets en évidence (Trouche 1992) que le *statut* des calculatrices n'est pas le même pour les élèves (qui les considèrent comme un *outil* de leur travail mathématique) et les professeurs (qui les considèrent comme un élément *étranger* à l'enseignement) ;

ii) Des questions relatives aux *effets* de ces outils : les premières recherches sur l'intégration du logiciel Derive, menées en France à partir de 1991, révèlent (Artigue 1995) des phénomènes didactiques liés aux *contraintes* des outils et à leurs *potentialités* (§ 3.3). Je montre dans mes travaux *l'illusion* (Trouche 1994) d'un effet naturellement positif des calculatrices graphiques sur les apprentissages et mets en question l'assertion que les possibilités de *visualisation* (4.1) conduisent nécessairement à une meilleure compréhension des concepts. Je montre (Trouche 1997), à propos de la notion de limites de fonctions, que l'utilisation *non maîtrisée* des calculatrices peut induire, chez les élèves, la construction de

[1] (Lavoie 1994) décrit par exemple les changements induis par le remplacement de la plume d'oie par la plume de fer dans l'enseignement de l'arithmétique au Québec au milieu du XIXe siècle.

connaissances mathématiques très différentes de celles qui sont attendues par le professeur (§ 2.3). Dagher (1996) montre que l'usage d'un grapheur (Fonctuse) ne garantit pas, *en soi*, la construction, par les élèves, de *l'articulation* entre des *registres* algébrique et graphique : l'efficacité du logiciel est liée aux caractéristiques de la situation didactique dans laquelle sont placés les élèves ;
iii) Des questions relatives aux *relations* entre les *environnements informatiques* et les *contraintes didactiques* : Noss & Hoyles (1996) mettent en évidence la difficulté pour les étudiants d'établir des *connexions* (§ 3.3) entre les connaissances construites dans un micromonde et les mathématiques « officielles » ; Guin (1995) montre qu'un logiciel peut s'avérer inutilisable dans un *contexte didactique*, dès lors que les choix cognitifs et didactiques sous-jacents sont en contradiction avec ceux d'un système éducatif donné ; Schneider (in Guin 1999) met en évidence la nécessité de la *reconstruction* (§ 2.1) complète d'un enseignement mathématique à la suite de l'intégration de nouveaux outils dans une classe ;

iv) Des questions relatives aux *dispositifs didactiques* nécessaires à mettre en œuvre pour intégrer les nouveaux outils : Dreyfus (in Keitel & Ruthven 1993) montre l'importance du choix par le professeur des *activités* et de leur *mise en scène* (§ 5.2) dans la classe, si l'on veut exploiter les potentialités des artefacts ; Guin (2001) montre *l'inadaptation* des formations classiques des enseignants à l'utilisation des nouveaux outils et la nécessité de nouveaux *dispositifs d'appui* (§ 5.4).

Cette problématique de *l'intégration* de l'informatique (Baron et Bruillard 1996) dans l'enseignement et la prise de conscience de sa *complexité* (Guin et Trouche 2001) suscitent la mise en relation des recherches (Collectif CNCRE 2000 ; Burril 2002) et l'émergence de nouvelles approches théoriques (Lagrange & al, in Van den Heuvel-Panhuizen 2001). Une approche fructueuse consiste à replacer l'intégration des outils mathématiques dans une problématique plus générale *d'intégration des outils* dans *l'activité humaine* (§ 1.1), dans le cadre des apprentissages scolaires, mais aussi de la formation et plus généralement du travail. L'article *La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur, éléments de méthode pour une étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes* (Trouche 2000b) est significatif de cette nouvelle approche empruntant à l'ergonomie cognitive.

2) Les processus de constitution d'un *instrument mathématique*

Cette approche *instrumentale* se fonde sur une théorie de la *perception,* de *l'action* et de la *conceptualisation*, elle définit un *instrument* comme une *construction individuelle* et *sociale* à partir d'un *artefact* donné, elle permet ainsi d'appréhender *l'articulation* entre *processus de conceptualisation* et *processus de construction des instruments*, dans une dialectique du *contrôle* de l'individu et de la pré-structuration de son action et de sa pensée par l'outil (du fait de ses *contraintes* et de ses potentialités).

2.1 Perception, action et *conceptualisation*

Cette théorie de la perception, de l'action et de la conceptualisation se fonde sur une relecture critique (Vergnaud 2002) du constructivisme piagétien ; cette relecture place au centre des processus cognitifs non plus la logique, mais la conceptualisation :

Si on ne peut pas s'en tenir à des stades généraux de pensée totalement ordonnés, mais qu'il faut au contraire saisir le développement des compétences et des conceptualisations dans leur variété et leurs différences, on est conduit à plusieurs prises de position (…)□

- les compétences résultent des formes d'organisation de l'activité mises en œuvre, c'est-à-dire des schèmes□ceux-ci sont à la fois sous le contrôle de l'institution chargée de les transmettre (famille, école, communauté de travail) et sous le contrôle du sujet individuel qui apprend□

- les situations sont à la fois la source et le critère de la connaissance. C'est en situation qu'on apprend. Une connaissance qui n'est pas opératoire n'est pas vraiment une connaissance (…)□

- la mise en mot est une compétence difficile à acquérir, y compris pour les professionnels et les scientifiques de haut niveau. Un traité scientifique ou technique est la partie visible d'un iceberg dont la majeure partie repose sur l'action et l'expérience.

Ce qui fonde la pensée, ce n'est donc pas la communication (*Looking at thinking as communicating* écrit (Sfard 2001)), mais l'action d'un sujet, intégré dans une communauté de travail ou d'apprentissage.

À la place de l'expression «□activité sensori-motrice□» de Piaget, Vergnaud propose l'«□activité perceptivo-gestuelle□», *tant il est vrai qu'il s'agit de sensations et d'actes moteurs organisés en perceptions et en gestes, pas seulement de sensori-motricité élémentaire.* (Vergnaud 2002).

L'activité est ainsi décrite comme un ensemble de «□gestes□», en relation dialectique avec la pensée, via *les schèmes*. Le schème, «□pensée en acte□», est précisément défini comme *organisation invariante de l'activité, pour une classe définie de situations*. Cette organisation comporte quatre composantes□

- un ou plusieurs buts, avec leur cortège de sous-buts et d'anticipation□

- des règles d'action, de prise d'information et de contrôle□

- des invariants opératoires (concepts-en acte et théorèmes-en-acte) permettant à la fois la prise et le traitement de l'information pertinente□

- des possibilités d'inférence (Vergnaud 2002).

Ces *composantes d'intentionnalité*, de *générativité*, de *conceptualisation* et *d'inférence* sont aussi traduites par Rabardel (1995) en termes de *fonctions□heuristique* (contrôle, organisation de l'action), *pragmatique* (action, transformation) et *épistémique* (prise d'information, compréhension).

Chevallard (1999) propose une autre approche, *anthropologique*, de l'activité (mathématique), en termes de *travail* sur une œuvre, inscrit dans une *institution*, articulé sur quatre niveaux□ le niveau des *tâches*, le niveau des *techniques* qui sont des façons particulières d'accomplir ces tâches dans l'institution, le niveau de la *technologie*, discours qui interroge et justifie les techniques, le niveau enfin d'une *théorie*, technologie de la technologie. Ces quatre niveaux constituent une *praxéologie*.

On peut tenter d'établir des passerelles entre l'approche psychologique de Vergnaud et l'approche anthropologique de Chevallard, en situant les techniques, ensemble de gestes (professionnels ou scolaires), comme la partie *observable* des schèmes. J'y reviendrai aux § 2.2 et 2.3. Il semble utile de concevoir surtout les deux approches comme relevant de démarches complémentaires pour le chercheur□

- l'étude des schèmes localise le regard sur *le sujet en action*, l'étude des techniques localise le regard sur *le sujet et ses rapports à l'institution*, aux tâches et aux gestes qu'elle propose□

- l'étude des schèmes est une *construction*, à partir de l'observation du sujet et des *régularités* de son action, l'étude des techniques est une *étude* des gestes et de *l'écart* entre les gestes *prescrits* et les gestes *réalisés* à l'intérieur d'une organisation praxéologique.

2.2. <u>De l'artefact à l'instrument mathématique</u>

Se situant dans le cadre théorique de la conceptualisation de Vergnaud, (Rabardel 1995 pour les situations de travail& in Bailleul 2000 pour l'enseignement des mathématiques) définit un instrument comme issu d'une construction (*la genèse instrumentale*) par le sujet, à partir d'un artefact donné:

Nous avons cherché à montrer que les instruments ont un caractère mixte, au sens où ils sont à la fois de l'ordre de l'artefact et de l'ordre des schèmes d'utilisation. Dans cette perspective, le processus de conception ne consiste pas à fournir un artefact à des utilisateurs: les instruments ne sont pas donnés au sujet de l'extérieur. Ce qui est donné, ce sont les artefacts ainsi que des schèmes sociaux d'utilisation existants dans l'environnement socioculturel du sujet. Les artefacts sont donc des propositions, que les individus développeront, ou non. C'est dans la mise en œuvre des systèmes que des potentialités se révèleront, que des développements nouveaux seront expérimentés, validés ou infirmés, que des fonctions seront affectées aux artefacts, de manière transitoire ou définitive, et en fonction de la diversité des situations et des projets que les personnes élaborent pour elles-mêmes. Les instruments sont issus de cette forme particulière de l'activité que nous appelons les genèses instrumentales. Il s'agit d'un processus de transformation dialectique des artefacts et des schèmes sociaux, au travers duquel se joue le développement de l'individu et de ses ressources (Béguin et Rabardel, in Vom Hofe 2000).

Comprendre la genèse instrumentale suppose de saisir plusieurs articulations :

- l'articulation entre les *schèmes sociaux* (qui sont pré-construits dans l'artefact par ses concepteurs et construits dans l'environnement socioculturel – dans l'institution classe – du sujet) et les *schèmes individuels* (que l'individu constitue par et pour lui-même);

- l'articulation entre deux types de *schèmes d'utilisation*: les *schèmes d'usage orientés vers les tâches secondes correspondant aux actions et activités spécifiques directement liées à l'artefact* (Rabardel 1995) et les *schèmes d'action instrumentée*, *dont la signification est donnée par l'acte global ayant pour but d'opérer des transformations sur l'objet de l'activité* (ibidem); un schème d'usage est ainsi le correspondant psychologique d'un *geste*, «grain» élémentaire de l'activité, un schème d'action instrumentée, le correspondant psychologique d'une *technique instrumentée* (§ 2.1);

- l'articulation entre deux composantes *duales* de la genèse: une composante *d'instrumentalisation* (relative à l'artefact, à la découverte et à la sélection des commandes, à la personnalisation de l'objet) et une composante *d'instrumentation*, relative à l'émergence et à l'évolution des schèmes pour la réalisation d'un type de tâche ou d'un ensemble de type de tâches;

- l'articulation entre ce que l'outil *impose* de faire -les *contraintes*- et ce qu'il *permet* de faire -les potentialités- (§ 2.4);

- l'articulation enfin entre les différents artefacts, ou entre différents *niveaux d'artefacts*, dont le sujet dispose pour son action (§ 2.5).

Cette approche est particulièrement féconde pour étudier les processus d'apprentissage des mathématiques dans des environnements technologiques complexes.

2.3 Une méthode d'analyse de *l'activité mathématique instrumentée*

Un artefact contraint les gestes et *façonne* la réalisation des tâches : comme il y a une *géométrie du compas* (Mascheroni 1798), il y a un calcul numérique du boulier. La constitution d'un instrument est aussi la constitution d'un corps de connaissances sur l'objet de l'activité.

i) Cette constitution peut être comprise à partir de l'étude des *gestes instrumentés*. J'ai ainsi mis en évidence l'importance d'un geste particulier, *le détour approximatif* : il consiste, par une combinaison de touches, à obtenir, sur une calculatrice symbolique (qui peut, en principe, fournir des valeurs numériques exactes), une valeur approchée pour le résultat d'un calcul. Ce geste peut avoir plusieurs fonctions :

- une fonction *d'indication*, *d'anticipation* ou de *vérification* (l'obtention d'une valeur approchée s'inscrit dans un processus de recherche de résultat ou de preuve) ;
- une fonction de *détermination* (la valeur approchée obtenue est prise comme résultat définitif).

Comprendre la fonction de ce geste, c'est-à-dire passer du *geste* au *schème d'usage*, suppose de considérer ce geste non pas isolément, mais à l'intérieur de l'activité que l'élève déploie pour résoudre une tâche donnée. J'ai pu distinguer plusieurs contextes de mise en oeuvre de ce schème d'usage : la recherche de valeurs approchées pour situer un nombre dans l'ensemble ordonné des réels, la résolution d'équations ou le calcul d'intégrales pour lesquels le logiciel ne dispose pas d'algorithme de résolution exacte, le calcul de limite, pour *contourner* le refus de réponse du logiciel. Le repérage des règles d'action, de prise d'information et de contrôle (§ 2.1), à l'intérieur de la réalisation de ces tâches, permet de situer le schème d'usage en question et ses liens avec le processus de conceptualisation : l'intégration systématique du détour approximatif dans un calcul de limite peut situer une limite comme un processus d'« arrondi » ou de « troncature » (certains élèves ayant trouvé grâce à ce geste « 0,3 » écrivent : « la limite est probablement 1/3 »).

ii) La constitution d'un instrument peut être appréhendée aussi à partir de l'étude des *schèmes d'action instrumentée* et donc des invariants opératoires (§ 2.1). Le schème étant ce qui relie le geste à la pensée, ce n'est que sa partie émergée qui est accessible à l'observateur. Un schème est une construction de l'observateur à partir des différentes traces de l'activité du sujet (les anticipations, les inférences en situation, etc.). Drijvers (in Guin & Trouche 2002) étudie ainsi un schème de résolution de système d'équations dans un environnement de calcul symbolique. J'ai réalisé aussi une étude de ce type, dans le cadre d'une classe de terminale scientifique, à propos de l'étude de limites de fonction en $+\infty$, dans un environnement de calculatrices graphiques (Trouche, in Guin et Trouche 2002).

Il y a un rapport dialectique entre les gestes réalisés et les invariants opératoires (figure 1) :

- les invariants opératoires *guident* les gestes, ils permettent de réaliser la tâche (dans le cas étudié, le théorème-en-acte « si f croît très fortement, alors $\lim_{+\infty} f = +\infty$ » guide les gestes de cadrages de la représentation graphique de la fonction et l'évaluation de sa croissance ; il permet ainsi de dire si la proposition $\lim_{+\infty} f = +\infty$ est vraie ou fausse pour une fonction donnée). Les invariants opératoires ont un domaine de validité important (tout du moins si l'on considère l'ensemble des fonctions du programme des lycées) et leur mise en œuvre

nécessite souvent un effort cognitif important (il faut évaluer dans le cas étudié si la fonction croît suffisamment vite etc.)□;

- en même temps les invariants opératoires *se construisent* à travers l'activité□ c'est parce que les théorèmes-en-actes permettent de guider la réalisation de la tâche qu'ils vont étendre naturellement leur domaine de validité, accroître leur opérationnalité et constituer, avec l'ensemble des situations rencontrées et l'ensemble des formes langagières et non langagières qui le représentent symboliquement, un *concept*, élément d'un *champ conceptuel* (Vergnaud 1990).

C'est en cela que l'on peut dire que les gestes *construisent* les invariants opératoires. Les schèmes, en amont et en aval de la conceptualisation, permettent de traduire cette *co-construction*.

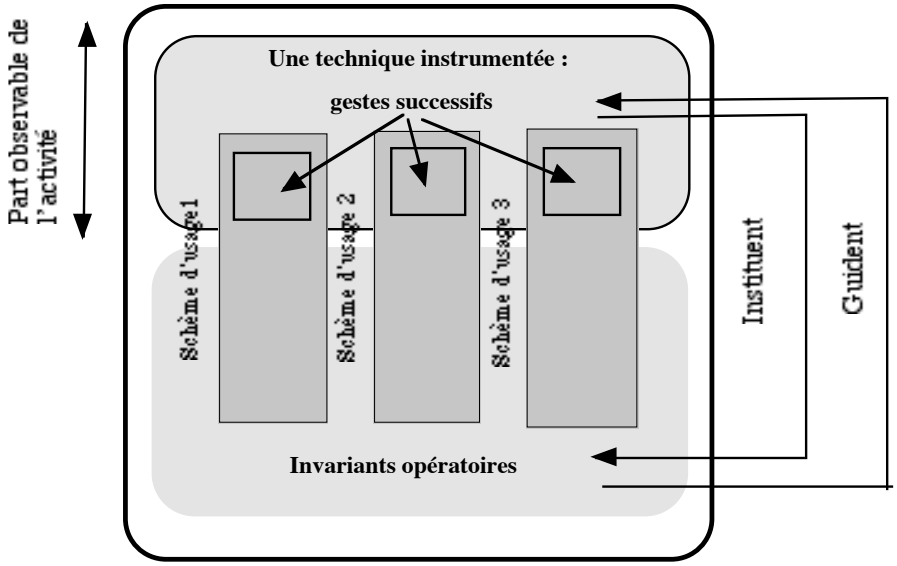


Figure 1. *Correspondances entre schèmes d'usage et gestes instrumentés d'une part, entre schème d'action instrumentée et technique instrumentée d'autre part*

L'étude des schèmes d'action instrumentée permet ainsi de repérer le processus de construction des instruments. J'ai ainsi montré (ibidem) que l'extension (la complexification) d'un artefact peut s'accompagner d'une réduction (d'un appauvrissement) de l'instrument construit par le sujet[2]. Cela donne une importance particulière au temps□ l'étude des *schèmes d'usage* et des *schèmes d'action instrumentée* revient à étudier, au-delà des *gestes* et des *techniques*, leurs fonctions épistémiques, pragmatiques, heuristiques (§ 2.1). Cela suppose d'analyser l'action de l'élève avec plus d'«□paisseur□□ l'épaisseur du temps, pour repérer les régularités dans la réalisation des tâches et l'épaisseur du discours, pour repérer les justifications des gestes.

Le schème est une *totalité dynamique fonctionnelle* et la recherche des invariants opératoires qui le constituent fournit des moyens d'étude des instruments construits par les

[2] Cette situation n'est pas, bien sûr, imposée par l'environnement. Dans la même classe, j'ai montré l'existence de processus très différents chez d'autres élèves□ une *instrumentalisation* parfois importante (stockage dans la calculatrice des principaux résultats relatifs aux limites, de programmes dédiés aux calculs de limites, etc.) et une *instrumentation* qui enrichit parfois les schèmes d'action instrumentée (utilisation de l'ensemble des fonctionnalités de la calculatrice□ commande spécifique de calcul de limite, observations graphiques et numériques).

élèves. Cette étude peut donner aussi, pour le professeur, des éléments *d'action* sur ces instruments (§ 5).

2.4. Degrés de *contrainte* et degrés de *liberté* dans la genèse

Un outil, même le plus simple, prescrit toujours, relativement, l'action de l'utilisateur, du fait d'un *système de contraintes* que j'examinerai plus loin (§ 3.2). Par exemple, on ne mange pas de la même façon avec des baguettes ou avec une fourchette□ mieux, baguettes et fourchettes *traduisent* et *construisent* des rapports différents aux aliments et, au-delà, avec la nature (Barthes 1980). Ceci est aussi vrai dans le cadre d'un environnement complexe□ y réaliser des tâches *traduit* et *construit* un rapport particulier avec un monde de connaissances. Balacheff (in Baron & Bruillard 2002) rappelle ainsi que *l'utilisateur d'un EIAH est essentiellement sous le contrôle de la machine et non l'inverse. Cette formule – qui peut paraître provocante aux oreilles de certains– rappelle simplement que si celui qui apprend dispose de connaissances qui ont fait leurs preuves- y compris dans le domaine visé par l'apprentissage- et est un acteur responsable, il est cependant dans sa position d'apprenant à la recherche, voulue ou provoquée, d'une évolution de ces connaissances en acceptant la tutelle d'un «□connaisseur□» de référence.* Il est sans doute utile, pour bien comprendre les effets de cette prescription d'activité, de repérer deux phénomènes : les *pertes d'expertise* et les *détournements d'usage*.

J'ai montré (ibidem) comment la disposition d'un outil sophistiqué, permettant de déterminer des limites de fonction, pouvait aboutir à l'émergence d'une notion «□presse-bouton□» (la limite d'une fonction ayant pour seule référence une touche sur le clavier d'une machine). De façon générale, les systèmes complexes peuvent susciter une perte d'expertise□ *bien des données montrent que les bienfaits de l'automation en termes d'accroissement d'expertise humaine (ex.□ systèmes experts) sont des idées reçues et que c'est plutôt une détérioration que l'on constate. Qu'il s'agisse d'habileté de haut niveau (résolution de problème) ou de bas niveau de contrôle (routines), l'automation a pour effet d'en réduire les occasions d'exercice* (Hoc, in Vom Hofe 2000). Il faut certes distinguer ce qui se passe dans le processus de travail et ce qui se passe dans le processus d'enseignement, où le discours sur les techniques (la *technologie* § 2.1) joue un rôle essentiel.

Dans ce cadre, il y a (il devrait y avoir) une *vie des techniques*□ des techniques officielles émergent et les tâches perdent leur caractère problématique□ elles «□se routinisent□» en devenant des moyens pour perfectionner les techniques. *L'environnement théorique permet de rendre compte des techniques, de leur fonctionnement et de leurs limites puis les techniques elles-mêmes se routinisent pour assurer la production de résultats utiles à l'activité mathématique. Les techniques jouent ainsi un rôle essentiel dans cette dynamique. Le terme «□technique□» est bien sûr à prendre au sens large. Une technique est une manière de résoudre une tâche et se présente souvent comme un assemblage complexe de parties routinisées et de raisonnements conscients. Ainsi, elle assure des fonctions pragmatiques, en permettant de produire des résultats, aussi bien qu'épistémique, en étant partie constituante de la compréhension des objets et source de nouvelles questions. À la suite de son inéluctable routinisation, elle est pensée globalement comme un geste unique, constituant élémentaire de nouvelles techniques* (Lagrange, in Guin & Trouche 2002).

Dans ce cadre, la routinisation n'est pas liée à une perte d'expertise, mais témoigne d'un déplacement d'expertise□ elle s'inscrit dans un processus d'acquisition d'une expertise supérieure. Mais ce processus n'a rien de naturel□ il suppose un guidage par l'institution d'enseignement (§ 5).

Deuxième phénomène apparaissant dans les environnements contraints, les catachrèses sont définies par Béguin & Rabardel (in Vom Hofe 2000)□ *le terme de catachrèse est emprunté à la linguistique et à la rhétorique, où il désigne l'usage d'un mot au-delà de son acception propre, ou à la place d'un autre. Par extension, l'idée a été transposée dans le champ de l'outillage pour désigner l'utilisation d'un outil à la place d'un autre ou l'utilisation d'outils pour des usages pour lesquels ils n'ont pas été conçus.* Les mêmes auteurs montrent l'intérêt, au niveau des instruments contemporains, d'analyser les catachrèses comme indices des *processus d'instrumentalisation* (§ 2.1)□

On pourrait penser que dans le contexte des technologies contemporaines les catachrèses tendraient à diminuer. Or il n'en est rien. Un exemple suffit à le montrer□ des pilotes d'avion qui n'étaient pas satisfaits de la vitesse de descente prévue par le calculateur de bord en phase d'atterrissage, donnent des informations fausses (par exemple l'indication d'un vent arrière qui n'existe pas) au calculateur de bord afin d'obtenir une vitesse de descente plus conforme à leurs souhaits. Les catachrèses sont classiquement interprétées en termes de détournement de l'objet par rapport aux fonctions prévues par les concepteurs. Cependant, cette interprétation en termes de détournement n'est pas la seule possible et même, de notre point de vue, souhaitable. La catachrèse peut également être considérée comme l'expression d'une activité spécifique du sujet□ la production de ses instruments et plus généralement de ses moyens d'action. Nous proposons donc de considérer les catachrèses comme des indices de la contribution des utilisateurs à la conception des instruments et de leurs usages. L'existence des catachrèses témoigne de la constitution par le sujet de moyens adaptés en vue des objectifs poursuivis, de l'élaboration d'instruments destinés à être insérés dans son activité en fonction de ses buts.

(Debray 2001) analyse de la même façon, mais sur le plan historique, la fécondité des *détournements d'usage*□ *(…) un phénomène général promis au meilleur avenir, le détournement d'outil. Il nous rappelle qu'un outil n'a pas de fonction préaffectée. La «□logique de l'usage□» peut en dévier à tout moment la trajectoire, voire la retourner contre ses promoteurs. Les rebondissements de ce bricolage, les fécondités de ce dévergondage donnent d'ailleurs à l'histoire des techniques, matérielles et intellectuelles (s'il est possible de distinguer), un cachet baroque et poétique qui la rapproche, pour notre plus grand profit et plaisir, de son pôle opposé□ une anthologie du merveilleux. La première machine à vapeur (Savery, 1698) ne fut pas conçue pour actionner un véhicule mais pour puiser de l'eau au fond d'un puits. Voir aussi Internet, du Pentagone aux pétitions des citoyens…*

On rencontre, dans les environnements de calculatrices complexes, de nombreux exemples de catachrèses, de différents types□

- des catachrèses mises en œuvre pour réaliser des «□tâches□» sortant du cadre scolaire, par exemple stocker – et exécuter – des jeux□
- des catachrèses mises en œuvre pour réaliser des tâches non assignées par l'institution, mais destinées à aménager le cadre de travail (modification de la barre des menus, réalisation de programmes divers)□
- des catachrèses mises en œuvre pour réaliser des tâches dans le cadre de la classe□ (par exemple l'utilisation du logiciel de dessin intégré pour réaliser des courbes d'ajustement (Trouche 1996)).

Certaines catachrèses ne manifestent pas un simple détournement d'usage, mais une appropriation particulière de l'outil, *une contribution à la conception des instruments et de leurs usages*. Cette appropriation, pour que le sujet puisse l'intégrer comme base d'une

constitution élargie d'un instrument, doit être reconnue par le maître et retravaillée dans la classe. À cette condition, les instruments font *engrenage* (§ 1.1).
Le contrôle des catachrèses, comme le contrôle des pertes d'expertise, suppose ainsi une *socialisation* (Guin et Trouche, in Guin 1999) des genèses instrumentales (§ 5.2).

2.5 Un ensemble d'outils de différents niveaux

La genèse instrumentale est un processus, en général, de *constitution* et de *combinaison* de *plusieurs instruments*, et cela pour plusieurs raisons□

- le travail scientifique en général, mathématique en particulier, confronte le praticien (professionnel, enseignant ou étudiant) à l'utilisation d'outils de plusieurs niveaux, matériel ou symbolique (§ 3.1). Dans un environnement de calculatrices symboliques, Defouad (2000) évoque ainsi *le mixage entre les anciennes techniques papier-crayon et les possibilités offertes par une calculatrice symbolique.* J'ai analysé aussi (encadré 3) la *combinaison* d'outils de différents niveaux à l'occasion d'un calcul de dérivée n^{ième} □les élèves utilisent à la fois une calculatrice symbolique (qui leur donne des résultats pour des valeurs particulières de n) et des calculs papier-crayon qui leur permettent de comprendre l'origine des régularités observées. (Artigue, in Guin & Trouche 2002) appelle *intelligence du calcul* cette aptitude à choisir, organiser, contrôler, piloter un calcul donné. Cette aptitude n'a rien de naturel□ la combinaison de plusieurs outils est souvent l'occasion de difficultés et d'erreurs. Proust (2000) a repéré ainsi des erreurs récurrentes dans les textes numériques babyloniens, pour les nombres de plus de 5 chiffres□ elle émet l'hypothèse que ces erreurs pourraient venir du recollement de deux calculs réalisés séparément grâce à un artefact tributaire des 5 doigts de la main. Les erreurs viendraient ainsi d'une mauvaise articulation de deux types d'outils□

- à la différence de la règle ou du compas, «□n□ artefact dédié aux mathématiques est aujourd'hui un *ensemble d'outils* (ce qui correspond à une évolution technique générale, § 1.2). Ainsi une calculatrice *symbolique* est *l'assemblage* d'un calculateur scientifique, d'un calculateur formel, d'un grapheur, d'un tableur, d'un programmateur, parfois d'un logiciel de géométrie et d'un éditeur de texte. Ce sont des outils qu'il revient à l'utilisateur de *combiner* dans son activité□

- de façon encore plus générale, Rabardel & Samurçay) 2001), évoquant (Wartofsky 1983), distinguent trois niveaux d'artefacts□

i) The level of primary artifacts which corresponds to the concept of the tool as it is commonly used, includes a great number of different artifacts, computers, robots, interfaces and simulators, as well as traces of the activity in the situations we presented;

ii) The social utilization schemes and pragmatic concepts are schematic invariants and are representative of the action and the activity. They can be considered as secondary artifacts, which consist of representations both of primary artifacts and of modes of action using primary artifacts;

iii) Finally, the level of tertiary artifacts – in the sense Cole intended (1995): artifacts for use in designing activities that will promote social and cognitive development – is represented, for trained subjects in particular, by simulated situations as well as by reflexive methods of self-analysis of their own or the collective activity.

Each of these artifact levels contributes to the development of the learning activity mediated by instruments. This development, conducted by subjects and collectives, is a necessary prerequisite to learning itself. Without this development of instruments and mediated activity, learning would not occur.

La genèse instrumentale est donc un processus d'une grande *complexité*, qui doit prendre en compte plusieurs outils, de différents niveaux. *L'assistance,* par l'enseignant et l'institution, de ces genèses est une question décisive que j'aborderai au § 5.

Cette transposition d'un cadre théorique (venu de l'ergonomie cognitive) au domaine d'étude de l'apprentissage des mathématiques a une influence certaine au niveau international :

- l'article *The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators* (Guin & Trouche 1999) est souvent cité dans la littérature de recherche (en particulier dans trois conférences introductives du dernier colloque (CAME 2001)) ;

- présentée dans le cadre d'un « Research Forum » consacré à l'intégration des technologies dans l'enseignement des mathématiques, lors de la 25e conférence PME (Lagrange & al, in Van den Heuvel-Panhuizen 2001), cette approche a été reprise depuis dans de nombreux articles (par exemple Drijvers (in Guin & Trouche 2002) dans le cadre des apprentissages algébriques ou Mariotti (2002) dans le cadre de l'interprétation des tâches en géométrie dynamique).

3) Conceptualisation et *représentations* externes dans l'activité mathématique instrumentée

Estimant que *Piaget s'est probablement désintéressé un peu trop du langage et du symbolisme*, Vergnaud (2002) insiste sur *la valeur opératoire de la forme prédicative de la connaissance : dès que l'on prend conscience (…) de la fonction de représentation des formes langagières et symboliques, on est conduit à reconnaître la valeur opératoire de la forme prédicative de la connaissance. Non seulement on agit sur autrui en lui parlant (…) mais on agit sur soi-même en modifiant le statut de ses propres connaissances : une connaissance mise en mot et en symboles n'est plus la même connaissance*[3].

Dans le prolongement de cette idée, je veux évoquer ici de façon générale le rôle des *représentations externes* dans les apprentissages mathématiques, les problèmes posés par les *processus de transposition informatique* des connaissances et par la *coordination des registres* en environnement informatique.

3.1 *Les outils sémiotiques* du travail mathématique

En mathématiques, les objets ne sont accessibles qu'à travers des *représentations sémiotiques*. Une représentation sémiotique est une représentation construite à partir de la mobilisation d'un *système de signes*. Pour Duval (1996), un *registre de représentation* se détermine par rapport à un système de signes (par exemple le registre des énoncés en langue naturelle, des graphes, des tableaux, des formules, des schémas), il permet de remplir les trois fonctions de *communication*, *d'objectivation* et de *traitement*. Une des conditions primordiales pour la conceptualisation mathématique est de disposer pour un même objet mathématique de plusieurs représentations sémiotiques, permettant ainsi de détacher un objet de ses représentations. Duval distingue les tâches de *traitement* (changer de représentation à

[3] Il semble qu'il y a là une évolution par rapport à ce que disait le même auteur quelques années plus tôt : *le symbolisme mathématique n'est à rigoureusement parler ni une condition suffisante, ni une condition nécessaire de la conceptualisation (…) le langage naturel est le moyen essentiel de représentation et d'identification des catégories mathématiques* (Vergnaud 1990).

l'intérieur d'un même registre) et les tâches de *conversion* (passer, pour un même objet, d'une représentation dans un registre à une représentation dans un autre registre). Disposer de plusieurs registres de représentations ne suffit pas pour accéder à la compréhension□ une deuxième condition est la *coordination* de ces registres. Cette coordination n'a rien de naturel□ les tâches de conversion entre deux registres peuvent susciter de grandes difficultés, qui ne sont pas nécessairement de même nature dans un sens ou dans l'autre.

Les traitements dépendent des *possibilités* données par les représentations elles-mêmes. Ces possibilités peuvent être analysées en termes *d'instrumentalité*□ Chevallard (1996) distingue parmi les objets mathématiques les objets *ostensifs* (comme un nom, une notation, un graphe, que l'on peut effectivement *manipuler* dans leur matérialité) et les objets *non ostensifs* (comme la fonction logarithme, que l'on peut simplement *évoquer* à partir des ostensifs qui lui sont associés et qui *guident* le travail sur les ostensifs[4]). Il repère, pour chaque ostensif, une valence *instrumentale*, qui permet de *faire*, et une valence *sémiotique*, qui permet *de voir ce qui est fait* (et dans le cas d'un écrit, ce qui a été fait) et qui *renvoie à* un complexe d'ostensifs et de non-ostensifs auquel l'ostensif en question est associé□ les ostensifs sont ainsi des *instruments sémiotiques*[5]. Bosch & Chevallard (1999) montrent que, relativement à une tâche donnée, dans une praxéologie donnée, un ostensif peut avoir une *instrumentalité* et une *sémioticité* plus ou moins grandes (encadré 2). ils distinguent cependant l'approche de Duval et leur propre approche, en estimant que, pour Duval, *on prend la tâche mathématique comme un donné, comme si les tâches mathématiques elles-mêmes étaient déjà écrites et bien décomposées en tant que tâches mathématiques (…). Or, dans ce qui est représenté comme un changement de registres qui ne dépendrait que du fonctionnement cognitif du sujet, nous voyons, quant à nous, la mise en œuvre d'une technique mathématique (…) dont la réalisation effective doit être raccordée à l'existence d'une praxéologie locale.* Pour nous, ces deux théorisations ne s'opposent pas, mais diffèrent «□simplement□» de point de vue. Elles témoignent du fait que, en inversant une formule qui a connu un certain succès[6], le cognitif, comme le mathématique, sont tous deux denses dans le didactique□

- le point de vue de Bosch & Chevallard oriente le regard du côté de la tâche, problématique, qui se construit en même temps que les techniques et les instruments sémiotiques associés au sein d'une institution donnée□
- le point de vue de Duval oriente le regard du côté du fonctionnement cognitif du sujet□ c'est précisément parce que le sujet apprenant n'est pas dans un «□état de nature□», mais dans une institution donnée que l'on peut étudier, pour une organisation praxéologique donnée, le coût cognitif d'une technique, à partir des traitements ou des conversions qu'elle suppose.

Pour l'analyse des systèmes complexes, il est souvent utile de fixer certains variables pour étudier l'effet des autres variables. C'est ce que permet cette double approche sémiotique.

3.2 La *transposition informatique*, un *principe sémiotique fondamental*

L'expression d'une connaissance, dans tout système de représentation, montre certains de ces aspects, mais aussi en transforme et en cache d'autres. C'est vrai pour la représentation

---

[4] D'une certaine façon, il y a le même rapport dialectique entre ostensifs et non ostensifs qu'entre les gestes et la pensée (§ 2.2 et 2.3).

[5] Le titre de l'article de Chevallard (1996) est «□les *outils* sémiotiques du travail mathématique□», le terme *outil* entre «□mieux□» dans le cadre de l'approche instrumentale introduite au § 2.2 que le terme *instrument* que l'on trouve ensuite dans l'article. Les articulations de plusieurs cadres théoriques confrontent toujours à des problèmes de «□conversion□» de mots.

[6] *Le didactique est partout dense dans le mathématique* (Bosch & Chevallard 1999).

d'un cercle sur une feuille de papier ou la photographie d'un paysage. C'est ce que Balacheff (in Baron & Bruillard 2002) nomme *le principe sémiotique fondamental*. Dans le domaine informatique, ce principe se traduit par ce que Balacheff (1994) appelle la *transposition informatique*, *ce travail sur la connaissance qui en permet une représentation symbolique et la mise en œuvre de cette représentation par un dispositif informatique*. Balacheff (in Baron & Bruillard 2002) précise que *la question de savoir comment peut être étudié ce phénomène, comment les systèmes de représentation mobilisés dans les modèles, les programmes et les interfaces sont évaluables de ce point de vue, est ouverte.*

Pour étudier cette transposition informatique, Balacheff (1994) distingue les *contraintes* (§ 2.2) liées à l'univers *interne* de la machine et les contraintes liées à *l'interface*. Rabardel (1995) propose, pour analyser les contraintes générales d'un outil, de distinguer trois types de contraintes : les *contraintes de modalités d'existence*, liées aux propriétés de l'artefact en tant qu'objet matériel ou cognitif, les *contraintes de finalisation*, liées aux objets sur lesquels il permet d'agir et aux transformations qu'il autorise, et enfin les *contraintes de pré-structuration de l'action*. Defouad (2000) suggère de prendre en compte les informations que l'élève introduit à l'interface, les informations accessibles à l'interface, mais non introduites par l'élève, les informations non accessibles à l'interface. Dans l'objectif d'intégrer ces différentes distinctions, j'ai proposé (*Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique*, in Guin & Trouche 2002) de retenir trois types de contraintes (qui sont en interrelation, et, de ce fait, concourent toutes à la pré-structuration de l'action de l'utilisateur) :

i) *des contraintes internes* (au sens de *contraintes physico-électroniques*) liées de façon intrinsèque au matériel. Elles sont liées à des informations qui peuvent être accessibles ou non, mais que l'utilisateur ne peut pas modifier : elles s'imposent à lui. Elles n'apparaissent pas comme *outils* au cours de l'action. Comme pour le théâtre (« la règle de l'unité de lieu »), les contraintes internes apparaissent comme éléments incontournables du *cadre* de l'action. Il en est ainsi, par exemple, de la nature du processeur, de la capacité de la mémoire et de la structure de l'écran, composé d'un nombre fini de pixels (Guin & Trouche 1999).

ii) *des contraintes de commandes* liées à l'existence et à la forme (c'est-à-dire à la syntaxe) des différentes commandes. Elles sont liées à des informations qui sont accessibles à l'interface, et que l'utilisateur peut utiliser ou modifier dans certaines limites pour obtenir un résultat donné. Par exemple, les calculatrices symboliques (à la différence des calculatrices graphiques) comportent une commande de calcul de limite (§ 2.2). La syntaxe limit(f(x), x, a) permet d'obtenir la limite de f au point a (si la calculatrice « connaît » cette limite, cf. Elbaz-Vincent, in Guin et Trouche 2002). Les *contraintes de commande* s'exercent sur les *gestes instrumentés* (§ 2.3).

iii) enfin *des contraintes d'organisation* liées à l'organisation du clavier et de l'écran, c'est-à-dire à la *structuration* des informations et des commandes disponibles. Elles sont accessibles à l'interface et l'utilisateur peut les utiliser ou les modifier dans certaines limites pour obtenir un résultat donné. Par exemple, pour l'étude d'une fonction, les choix du concepteur (de noms, de chemin d'accès, de places dans un menu, d'articulation des différentes applications) colorent d'une certaine façon les objets disponibles. Ces choix sont liés à une étude ergonomique des *besoins* des élèves pour les niveaux scolaires visés par l'outil de calcul et, en même temps, ils *favorisent* un certain type d'utilisation. Ainsi sur les calculatrices graphiques, les touches donnant accès aux informations numériques (tableau de valeurs) sur une fonction sont souvent « derrière » les touches donnant des informations graphiques, ce qui privilégie de fait l'étude graphique par rapport à l'étude numérique. Sur une calculatrice symbolique, l'organisation est plus complexe (encadré 1). Les contraintes

d'organisation s'exercent sur l'organisation des gestes instrumentés, c'est-à-dire sur les techniques instrumentées (§ 2.3).

Ces trois ensembles de contraintes doivent être compris à deux niveaux :

- ils s'exercent sur les connaissances implémentées dans la machine : la transposition informatique crée de nouveaux ostensifs, pourvus de nouvelles valences instrumentales et sémiotiques (encadré 2) ;
- ils s'exercent sur l'activité de l'utilisateur.

Cette typologie permet ainsi d'analyser les contraintes d'un outil : elle permet de contrer *l'illusion d'une neutralité* des artefacts en débusquant certains choix des concepteurs. Elle permet ainsi *d'anticiper* et de mieux comprendre certains phénomènes didactiques (§ 3.3) et certaines formes des genèses instrumentales à l'œuvre dans un processus d'apprentissage instrumenté. L'utilisateur n'est pas « libre » d'utiliser comme il l'entend un artefact donné : cette utilisation est, relativement, préstructurée par l'artefact lui-même (Luengo & Balacheff 1998). En même temps, en soulageant l'utilisateur d'une partie de son travail, en permettant l'exploration de représentations dans différents registres (Yerushalmy 1997), l'artefact ouvre de nouvelles *possibilités* pour la conceptualisation. L'analyse a priori des contraintes et des potentialités d'un outil doit être articulée avec les usages qui en sont faits : la transposition informatique résulte à la fois des choix des concepteurs de l'outil, des techniques instrumentées mises en œuvre par le sujet et des choix de l'institution dans laquelle s'inscrit l'utilisation de l'outil (Lagrange 2000).

Encadré 1. *Quelques contraintes d'organisation sur une calculatrice TI-92*

Les différentes applications disponibles (figure a) sont présentées dans un menu « Applications », hiérarchisées, mais avec la même facilité d'accès. Cependant les applications relatives au calcul et à l'étude des fonctions (Home, Y= Editor, Graph et Table) sont aussi accessibles directement, par des touches placées juste sous l'écran.

Chaque application donne accès à plusieurs *registres* (§ 3.1) de représentation. L'application Home (application de calcul numérique et symbolique) combine ainsi les registres des formules algébriques et des expressions numériques, cf. figure b).

D'autres calculatrices (par exemple Casio FX 2.0) ont fait d'autres choix, en distinguant une première application de calcul (NUM) qui fait du calcul numérique approché et une deuxième application (CAS) qui fait du calcul formel. On peut faire l'hypothèse que, dans les deux cas (TI et Casio), ce n'est pas le même rapport à l'approximation numérique qui est favorisé.

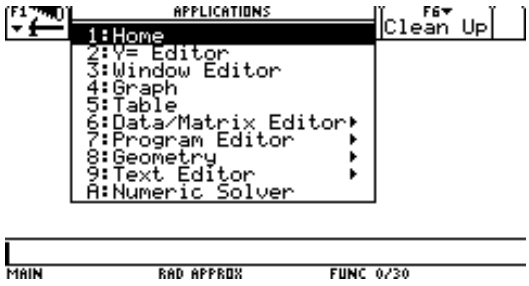


Figure a. *Les différentes applications disponibles*

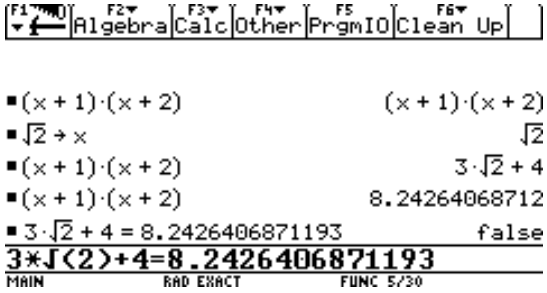


Figure b. Un écran de l'application Home

Notons enfin que l'articulation des calculs numériques exacts et approchés peut poser problème (figure b) : alors que le mode de calcul est le mode exact (repérable sur le bandeau d'état, en bas de l'écran), un « raccourci clavier » (§ 2.2, le *détour approximatif*) permet d'obtenir une valeur approchée d'un résultat donné (il ne reste ensuite sur l'écran aucune indication du caractère approché du calcul).

3.3 *Conversions* et *traitements* dans les environnements informatiques

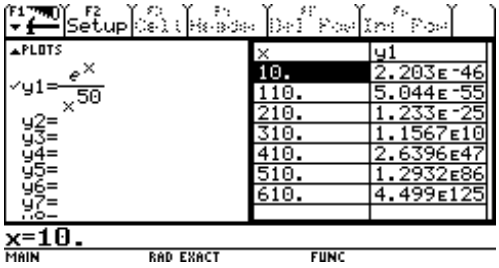
On a pu repérer, lors des premières expériences d'intégration de calculatrices complexes (§□.4) des problèmes de conversions et de traitements dans les différents registres que des environnements informatiques proposent, c'est-à-dire des problèmes liés à *l'actualisation* des *potentialités* des outils□

i) Des problèmes de *transposition,* par l'artefact, des écritures qui lui sont soumises□ l'écart entre ce qui est saisi par l'élève dans l'application de calcul formel et ce qui est retourné sur l'écran par la machine (cf. ci-dessous) produit un phénomène de *pseudo - transparence* (Artigue 1995). Il résulte du décalage entre les modes de représentation – interne et à l'interface des objets.

ii) Des problèmes de *traitement* liés à la confrontation des environnements□ Artigue (1995) repère le phénomène de *double référence*, lié à la double interprétation des tâches, suivant que l'on se situe dans un environnement papier-crayon ou dans un environnement calcul formel.

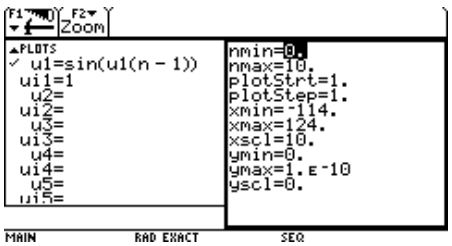
iii) Des problèmes de *traitement* liés à l'enfermement du travail dans un seul registre□ je désigne par *acharnement localisé* le phénomène qui consiste, pour résoudre un problème, à reproduire la même technique, dans la même application, en procédant éventuellement à des ajustements successifs, même quand la technique s'avère inadaptée ou incomplète.

Pour déterminer la limite d'une fonction donnée en +∞, un élève utilise systématiquement la table de valeurs de sa calculatrice graphique «□arce que cela lui permet d'obtenir directement les valeurs de la fonction, sans avoir besoin de réfléchir à la fenêtre convenable□. La recherche de limite se fait par déplacement sur la table de valeurs, en prenant simplement des valeurs de la variable de plus en plus grandes (§ 2.2□Trouche 1997).



iv) Des problèmes de *conversion* liés au passage d'un environnement dans un autre□ je désigne par *transport automatique* le phénomène lié à aux tentatives de conversion immédiate (c'est-à-dire avant toute analyse) de l'énoncé d'un problème (donné en général en utilisant le registre hybride de la *langue mathématique* (Laborde 1982)) dans les registres de la calculatrice, dans l'idée que le caractère *complet* de l'outil pourra prendre en charge automatiquement la résolution du problème.

Un élève veut déterminer le plus petit rang à partir duquel les termes d'une suite qui converge vers 0 seront inférieurs à 10^{-10}. Il prend sa calculatrice, saisit toutes les données du problème, et demande comment la calculatrice peut trouver automatiquement la valeur «□min□□ cette question manifeste une confusion pour cet élève entre les réponses que l'on peut attendre de la calculatrice et les données que l'on doit saisir (cf. copie d'écran ci-contre) (Trouche 1997).



Dans le sens environnement calculatrice –> environnement papier-crayon, on constate un phénomène *d'hybridation* du langage, lié au transport du langage machine dans la langue mathématique. On trouve ainsi dans des travaux d'élèves des phrases de ce type : « *En faisant solve (f(x)=0), j'ai trouvé x = 0 or x = 5* » (Trouche 1997).

De façon générale, ces phénomènes didactiques révèlent bien que la disposition aisée de nombreux registres à partir des applications de la calculatrice ne facilite et ne favorise pas nécessairement les traitements et les conversions. Un phénomène comme *l'acharnement localisé* peut freiner la conceptualisation du fait d'un travail exclusif mono-registre, en entraînant des confusions entre l'objet et l'une de ses représentations, entre un non-ostensif et un des ostensifs associés dans l'environnement informatique : j'ai montré en particulier comment, dans les environnements de calculatrices *graphiques*, il pouvait y avoir *confusion* entre une fonction et l'une de ses représentations graphiques et comment dans les environnements de calculatrice *symbolique* il pouvait y avoir *aplatissement* de la notion de la limite d'une fonction sur la commande correspondante de l'artefact (Trouche 2000b).

(Drijvers 2002) présente deux conditions, idéales, pour que les conceptions, les techniques papier-crayon et les techniques instrumentées (§ 2.4) s'appuient mutuellement : *the paper algebra technique should be congruent with the paper-and-pencil technique, and the computer algebra technique should be transparent to the student*.

Encadré 2. *Instrumentalité et sémioticité des ostensifs (§ 3.1)*

L'instrumentalité et la *sémioticité* des ostensifs des environnements papier-crayon et calculatrices, pour une même tâche, dans une praxéologie où les techniques instrumentées ne sont pas instituées, peuvent être très différentes. Considérons par exemple la résolution de l'équation $\ln(e^x - 1) = x$ (Trouche 1996).

Dans un environnement papier-crayon, le *traitement* algébrique, par recours à l'ostensif «□notation exponentielle□» et à la fonction qui lui est associée, est immédiat□: l'équation $e^x - 1 = e^x$ n'a pas de solution. La question peut être *convertie* dans un cadre fonctionnel□: une étude de fonction, débouchant sur un travail sur de nouveaux ostensifs, les graphes des fonctions $x \mapsto \ln(e^x - 1)$ et $x \mapsto x$, permet aussi de résoudre l'équation en relevant le caractère asymptotique des deux courbes.

On peut estimer que l'instrumentalité des ostensifs algébriques (ce qui permet de faire) est plus grande que celle des ostensifs graphiques liés à une étude de fonction (le traitement est plus direct). La sémioticité (ce qui montre ce que l'on fait) est bonne dans les deux registres□: ce qui est fait peut être relié à un complexe d'ostensifs et de non-ostensifs (les fonctions logarithmes, les techniques d'intersection de courbes, etc.) existant dans l'organisation mathématique de la classe.

Dans un environnement calculatrice TI-92 (figure a), les choses sont très différentes□:

- la résolution algébrique ne donne rien (figure a, 1e ligne) : la forme de l'équation proposée est simplement modifiée□; les résolutions numériques (figure a, 2e et 3e lignes) donnent des réponses (qui diffèrent suivant la forme de la question□: si l'on choisit la commande solve en calcul approché, on trouve 61, 25…, si l'on choisit le solveur numérique, on trouve 36□; ceci pose évidemment un problème de *traitement* de l'information, à l'intérieur du même registre).
- le recours à l'application graphique (figure b) peut montrer la proximité des courbes et suggérer l'absence de solution.

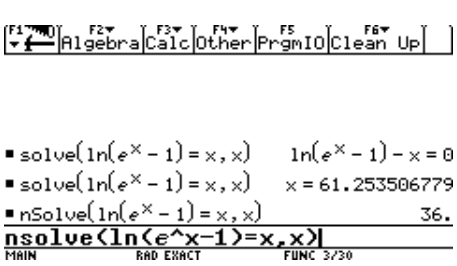


Figure a. *Traces de l'étude algébrique et numérique*

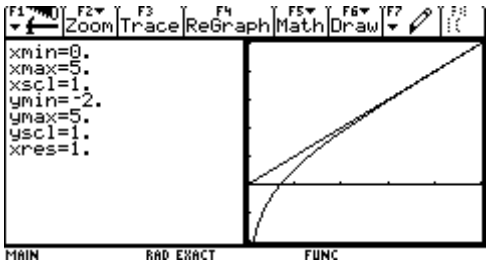


Figure b. *Traces de l'étude graphique*

Le traitement formel ou numérique de l'équation ne donne aucune réponse ou donne une réponse fausse, sans indication de *la façon de faire*. L'instrumentalité et la sémioticité des ostensifs informatiques solve ou nsolve semblent ici très faibles, plus limitées que l'instrumentalité et la sémioticité des graphiques.

Le changement d'environnement se traduit par un changement des ostensifs mobilisés (Defouad 2000), pour la réalisation de la même tâche□: dans le registre algébrique, en papier-crayon, la résolution de l'équation fait appel à un complexe d'ostensifs et de non-ostensifs autour de la «□fonction exponentielle□», dans l'environnement calculatrice, la résolution de l'équation se fait par recours à l'unique ostensif solve.

L'instrumentalité et la sémioticité des ostensifs ne peuvent cependant pas être abordées in abstracto□: *le problème de la perte de sens affectant certains types de manipulations ostensives est (…) plus facilement abordable si on le formule en termes de besoins technologiques et théoriques des organisations praxéologiques considérées* (Bosch et Chevallard 1999).

Contrôler les déperditions d'instrumentalité ou de sémioticité suppose la reconstruction d'une praxéologie *justifiant*, *assistant* et *contrôlant* les techniques instrumentées (§ 5□; Lagrange 2000).

Il définit la congruence comme la possibilité de reconnaître des techniques mises en œuvre dans les deux environnements comme des implémentations différentes d'une même technique originelle, et la transparence comme la possibilité de comprendre les traitements réalisés par la machine sur la base de son expérience des techniques papier-crayon. Drijvers observe que les phénomènes de pseudo-transparence et de double référence (cf. supra) s'opposent directement à la transparence et à la congruence. La congruence et la transparence sont bien, en général, des conditions *idéales*, au sens de conditions impossibles à réunir. Ceci constitue pour Drijvers un *obstacle global à l'apprentissage*. Cette dernière assertion peut être questionnée : on peut estimer en effet que la non-congruence des techniques est une des *conditions* de l'apprentissage, dans la mesure où elle permet de s'interroger sur la tâche à réaliser et sur les technologies qui justifient ces techniques (§ 2.1).

C'est ce que reconnaît d'une certaine façon Drijvers, quand il souligne que l'obstacle global peut constituer une opportunité, dès lors qu'il est intégré dans une *stratégie pédagogique* adéquate.

Assister *la gestion* et *le contrôle* par les élèves des différents registres sémiotiques disponibles dans l'environnement et *le pilotage de la machine* (Artigue & al 1998) suppose nécessairement des dispositifs didactiques particuliers (§ 5).

4) Conceptualisation et *fonctionnement cognitif* dans l'activité mathématique instrumentée

L'étude de la *perception* et plus généralement des fonctions cognitives peut donner des informations sur les processus de conceptualisation : *l'activité perceptive et la prise d'information font partie de l'activité opératoire* (Vergnaud 2002). Les progrès techniques permettent aujourd'hui de mieux étudier le fonctionnement cognitif « de l'extérieur » (par exemple à partir du suivi du regard du sujet sur l'écran de travail (Anderson 2002)) ou « de l'intérieur », grâce aux technologies d'imagerie cérébrale (Houdé & al 2002). De ces études émergent deux résultats importants :

- la réalisation de la plupart des tâches, même élémentaires, suppose le *traitement parallèle et interactif* de l'information par des aires cérébrales différentes ;
- le *contrôle* nécessaire à ce traitement n'a rien de *naturel*, il nécessite une *attention* en éveil et *résulte d'apprentissages spécifiques.*

Ces résultats donnent quelques pistes pour mieux comprendre, dans les environnements informatiques, *l'utilisateur parfois opportuniste et souvent déconcertant* (Balacheff, in Baron & Bruillard 2002) : le traitement *parallèle et interactif*, dans ces environnements, d'une multiplicité d'informations suppose de la part de l'apprenant un contrôle très fort et nécessite, de la part de l'enseignant, la constitution de *dispositifs d'assistance* (§ 5).

4.1 *L'économie* du travail mathématique et le fonctionnement cognitif *à l'économie*

Les résultats récents des neurosciences remettent en cause les modèles « modularistes » du fonctionnement cognitif (localisant chaque fonction cognitive dans une région cérébrale réduite) : *le fait que l'on ne puisse pas réellement établir de correspondance biunivoque entre les aires cérébrales et des modules de traitement cognitif indique que c'est l'activité du réseau, et donc le traitement parallèle et interactif de l'information entre ces aires, qui est la base des fonctions mentales, et non un processus sériel de calculs effectués individuellement*

au sein de chaque région (Houdé & al 2002). Ce traitement parallèle et interactif de l'information suppose une coordination des opérations et un contrôle des perceptions.

i) La question de la *coordination* des opérations

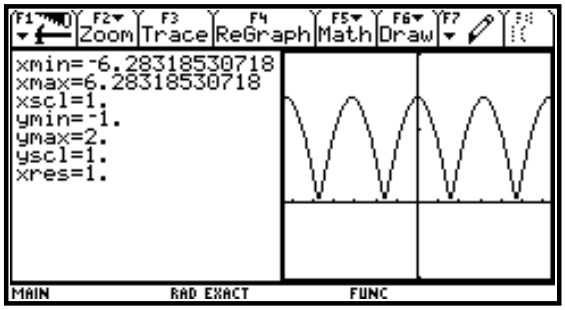
(Changeux 2002) montre la difficulté de *coordonner* des opérations relevant de modalités distinctes – perception visuelle, mémoire des mots, programmation motrice – pour les unifier en une même action motrice. En présence d'une multiplicité d'informations et en l'absence d'un effort d'attention, c'est la perception dont le traitement est le plus rapide qui est sélectionnée. On peut interpréter ainsi certains phénomènes relevés dans les environnements technologiques complexes, où de nombreuses informations sont disponibles à peu de frais. Defouad (2000) met ainsi en évidence un phénomène de *zapping* qui consiste à changer rapidement de fenêtre sans analyser les résultats successifs obtenus, Artigue (1995) repère un phénomène de *pêche*, qui consiste à multiplier les essais sans tenter de les organiser ou de les contrôler. Ces deux phénomènes ont ceci de commun qu'ils consistent à faire « défiler » les informations jusqu'à l'obtention d'un résultat facilement interprétable ou exploitable. C'est toute *l'économie* du travail mathématique (Artigue, in Guin & Trouche 2002) qui en est affectée.

ii) La question du *contrôle* des perceptions

Houdé analyse les erreurs de raisonnement déductif non pas comme une absence de rationalité, mais comme l'absence d'inhibition de schèmes non pertinents, marquée par la non-mobilisation des zones cérébrales préfrontales. *dans une tâche de logique déductive, notre cerveau peut spontanément fonctionner à l'économie, c'est-à-dire en recrutant un réseau postérieur fortement ancré dans la perception des mots, des formes et de l'espace, plutôt que des régions préfrontales* (Houdé & al 2002). La mise en lumière de ces biais permet d'interpréter l'influence des images que la technologie permet d'obtenir, *images dotées d'un puissant pouvoir d'insémination de la réalité* (Sfez 2002) et l'influence des gestes qui les produisent ou les accompagnent. On peut en repérer plusieurs manifestations.

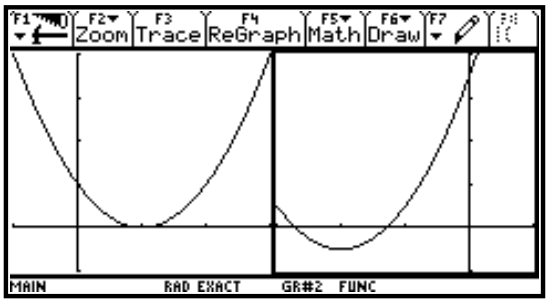
Exemple 1 (Defouad 2000)

Il s'agit de l'étude de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+\cos(2x)}$ *. au vu de la représentation graphique, un élève conjecture que la fonction est positive, peut-être nulle en certains endroits. Il regarde avec Trace puis utilise la commande F5-minimum. Après quelques essais, il conclut « qu'elle ne descend pas en 0 ».*



Exemple 2 (Trouche 1995)

Après avoir observé les effets, sur une calculatrice graphique, des coefficients de l'équation $y = ax^2 + bx + c$ *sur la forme et la localisation de la parabole, les élèves retiennent le résultat suivant : quand c augmente, la parabole monte, quand c diminue la parabole descend. À la question « quel est le signe de c pour les deux paraboles ci-contre ? », la réponse est : c est nul pour la parabole de gauche (puisque la parabole est « sur le sol »), c est négatif pour la parabole de droite (puisque la parabole est « descendue »).*



L'importance de *l'intériorisation* des gestes et des mouvements (exemples ci-dessus) est aussi relevée par Lakoff et Nunez (2000). Houdé (ibidem) montre qu'il est possible de surmonter ces biais de raisonnement, mais que des *instructions verbales* relatives aux principes logiques sous-jacents ne suffisent en général pas, il est nécessaire de mettre en œuvre *un apprentissage exécutif directement ciblé sur l'inhibition* (§ 5).

iii) Le traitement des calculs

Dehaene (1997) montre la complexité des processus neuronaux mis en œuvre pour réaliser un calcul « simple », en particulier pour comparer deux résultats : *comment des régions cérébrales éparses reconnaissent-elles qu'elles représentent le même nombre sous des formats différents ?* Il utilise le terme *d'orchestration* pour désigner la *coordination* nécessaire des fonctions de réseaux neuronaux distribués[7]. Cette question est cruciale dans les environnements informatiques où les résultats fournis par la machine ne sont pas toujours ceux qui sont attendus (Trouche 1996).

4.2 *L'espace de travail global*

La question du *contrôle* des perceptions, des informations et de l'action est essentielle : *La prise d'information et le contrôle sont des conditions essentielles d'efficacité de l'action* (Vergnaud 2002). Elle est traduite par Vygotski (1934) en termes de *niveaux de conscience*, celui qui permet de faire et qui conditionne la réussite (*conscience-avant*) et celui qui permet de revenir sur les raisons de la réussite et de l'échec et qui conditionne la stabilisation et l'explicitation des connaissances (*conscience-après*). Changeux (2002) utilise une acception plus large de ces niveaux de conscience : *il existe une multiplicité de niveaux de conscience et des hiérarchies entre eux. Ils incluent le sommeil, le rêve et l'état de veille, mais aussi la conscience passive (ou perceptive) par opposition à une conscience attentive et réflexive, comprenant l'action d'organiser et de planifier, de raisonner, de résoudre des problèmes à l'aide d'un effort d'introspection* (…) *La conscience donne un accès global au passé, à travers deux sortes de processus cognitifs : la simulation, processus par lequel on engendre*

[7] J'introduirai ce terme évocateur *d'orchestration* pour le travail instrumenté, mais dans un sens didactique, au § 5.

des modèles internes de la réalité et l'examen – le test – de leur adéquation à la réalité, ou encore, disons-le, de leur vérité.

Changeux développe alors l'hypothèse de l'existence de *deux réseaux computationnels majeurs*□ un réseau de *traitement* composé de processeurs parallèles en compétition et un réseau dédié aux fonctions de *supervision*, qui incluent la prise de décision, le comportement orienté vers un but et la planification, qu'il appelle *espace de travail global*.

Cette fonction de *pilotage* est essentielle en général en mathématiques (Robert & Robinet (1996) évoquent le *contrôle*[8] comme métaconnaissance globale) et en particulier dans les environnements riches en informations et en possibilités d'action (Artigue § 2.5 parle *d'intelligence du calcul*, Defouad (2000) évoque *la sensibilité aux contradictions*).

4.3 *Complexité* des environnements et *différentiation* des *modes de travail*

Les genèses instrumentales ne sont des processus ni linéaires, ni homogènes.

- Defouad (2000) montre l'évolution des genèses en fonction du temps□ elles passent au début par une phase *d'éclatement* (phase de découverte d'un nouvel outil, marquée par la rupture avec des techniques anciennes et le recherche de nouveaux équilibres), puis par une phase *d'épuration*□ (phase de stabilisation de nouvelles techniques instrumentées qui s'accompagne d'une centration sur quelques gestes privilégiés)□;

- Artigue & al (1998) et Trouche (2000b) montrent la différentiation des genèses en fonction des élèves□ la *complexification* de l'environnement s'accompagne d'une *différentiation* des *genèses instrumentales* (§ 2.2).

C'est sans doute le suivi de travaux d'élèves sur une longue durée qui suscite l'intérêt pour l'étude des *façons de faire* des mathématiques dans des environnements technologiques complexes. Pour repérer ces façons de faire, on parle de *working styles* (Weigand & Weller 2001), de *profils* (Defouad 2000□; Faure & Goarin 2000) ou de *comportements* (Trouche 1997). Je préfère ici parler de *modes de travail*[9] (*working styles* donne l'impression qu'il ne s'agit que de forme, alors que c'est la structure même du travail qui est en cause□; *profils* ou *comportements* sont des expressions trop générales□ il s'agit ici de repérer les caractères particuliers du *travail* mathématique).

Le repérage de ces modes de travail suppose le choix de variables□

- Faure & Goarin (2000), à partir du *mode d'introduction de la calculatrice*, distinguent, parmi une population de 500 élèves auxquels a été soumis un questionnaire, plusieurs profils. Les réponses aux questions posées sur les modes de travail (la calculatrice est-elle utile en classe, à la maison□; quelle est l'importance attribuée au livre de mathématiques, au cahier de cours ou à la calculatrice, etc.) ne varient pas significativement suivant ces profils□ le mode *d'introduction* d'un outil n'est qu'un des éléments susceptibles d'influencer la genèse instrumentale. D'autres variables peuvent jouer, tout au long du processus d'apprentissage, et agir sur les *rapports institutionnels* qui se nouent avec les mathématiques et avec l'outil□;

- ce sont ces rapports institutionnels que Defouad (2000) prend en compte, en distinguant différents *profils mathématiques* et *technologiques* d'élèves. Les profils mathématiques sont répartis sur une échelle d'*élève faible* à *très bon élève*, les profils technologiques prennent en compte le rapport des élèves aux calculatrices (de très négatif à

[8] Le terme *contrôle* a été traduit dans (Guin & Trouche 1999) par *process of command.*
[9] L'expression *mode de travail* a été traduite (Guin & Trouche 1999) par□ *work method.*

très positif), le temps depuis lequel la calculatrice est utilisée et la fréquence d'utilisation de l'ordinateur à la maison. L'étude met en évidence l'influence dominante du profil mathématique sur les genèses instrumentales (le passage des *phases d'éclatement* aux *phases d'épuration* semble d'autant plus rapide que le profil mathématique est bon).

Cette importance du profil mathématique est confirmée par mes observations (Trouche 2000b). Mais il semble aussi que la complexité des environnements technologiques et des processus de genèse instrumentale nécessite la prise en compte d'autres variables que la seule réussite scolaire mathématique (matérialisée par l'échelle « élève faible-élève fort »). Pour cela, j'ai choisi, dans un environnement de calculatrices symboliques, cinq types d'indicateurs :

i) le degré de sollicitation des différentes sources d'information (i.e. des médiations, § 1.1) : la calculatrice, le papier-crayon, les références construites (disponibles en mémoire ou dans le cahier de cours), le voisinage (en particulier dans les activités de recherche en binômes) ;

ii) le degré de maîtrise de métaconnaissances (Pitrat 1990) de premier niveau : *l'investigation* (permettant de rechercher l'information dans les différentes sources disponibles (cf. supra), le *stockage* des connaissances (il peut se faire à côté des connaissances anciennes ou alors s'accompagner d'une *réorganisation cognitive* (Dorfler, in Keitel & Ruthven 1993)) et leur *expression* ;

iii) le degré de maîtrise de métaconnaissances de deuxième niveau qui permettent de *traiter* l'information : la *coordination* des informations, essentielle dans les situations de pluralité des registres (§ 3.3) et des outils (§ 2.4), *l'inférence* et *l'interprétation sémantique*, essentielles particulièrement en mathématiques ;

iv) le degré de mobilisation des différentes *méthodes de preuve* : la preuve peut procéder par *analogie*, par *démonstration*, par *accumulation* d'indices concordants, par *confrontation* (reposant sur la comparaison critique des résultats fournis par les différentes sources d'information) ou par *copié-collé* (reposant sur la transposition mécanique d'éléments de preuve identifiés comme pertinents) ;

v) le degré de *contrôle* (§ 4.2) de ses perceptions et de sa propre activité.

Plusieurs types de traces ont permis de repérer les modes de travail, relativement à ces indicateurs (Trouche 1996) : les traces écrites des travaux d'élèves (dans des productions de type TP ou dans des productions plus classiques –devoirs à la maison ou devoirs en classe), l'observation chronométrée de leur travail (permettant de mesurer le temps consacré à la mobilisation des différents outils et, à l'intérieur de ceux-ci, à chaque geste), le recueil des avis des élèves sur leur propre travail (grâce à des « baromètres » réguliers). De cette étude ont émergé des *invariants* et des *concordances* pour cinq modes de travail extrêmes (tableau 1) : *théorique*, *rationnel*, *automate*, *bricoleur* et *expérimentateur*[10].

[10] Je reprends les « étiquettes » issues de l'expérimentation, sauf l'étiquette « scolaire », vivement, et justement, contestée à l'occasion de plusieurs exposés. Je l'ai remplacée ici par « automate », pris dans le sens de « qui agit machinalement, par automatisme, par routine ». Les étiquettes *théorique, rationnel, automate, bricoleur et expérimentateur* ont été traduites (Guin & Trouche 1999) par *theoretical, rational, random, mechanical et resourceful* : la difficulté de trouver des traductions adéquates témoigne du caractère nécessairement caricatural (exagérant certains traits et en négligeant d'autres) des étiquettes choisies.

Modes de travail	Théorique	Rationnel	Bricoleur	Expérimen-tateur	Automate
Sources d'information privilégiées	Références	Papier/crayon	Calculatrice	Toutes	Aucune
Métaconnaissances privilégiées	Interprétation	Inférence	Investigation	Comparaison	Investigation
Méthodes de preuve privilégiées	Analogie	Démonstration	Accumulation	Confrontation	Copié/collé
Contrôle	Fort	Fort	Faible	Moyen	Faible
Temps global de travail avec la calculatrice	Moyen	Faible	Important	Moyen	Moyen
Temps de chaque *geste* instrumenté	Important	Faible	Faible	Important	Important

Tableau 1. *Repérage des différents modes de travail à partir des indicateurs choisis*

Des modalités identiques de certains indicateurs peuvent avoir des explications fort différentes :

- ainsi le temps accordé à chaque geste instrumenté est extrêmement bref pour le mode de travail bricoleur parce qu'il correspond à un comportement de *zapping* (§ 4.1) et pour le mode de travail rationnel parce qu'il correspond à une utilisation de la calculatrice uniquement pour des actions *ciblées* qui ne laissent place ni au hasard avant le choix, ni à la réflexion après obtention d'un résultat par la calculatrice ;

- ce temps est beaucoup plus long pour les modes de travail théoriques, expérimentateurs ou automates : pour les deux premiers modes de travail, à cause *du temps de réflexion* nécessaire à l'analyse d'un résultat et à sa comparaison avec d'autres résultats ; pour le mode de travail automate, à cause *des difficultés d'utilisation* de l'outil de calcul.

Cette typologie permet d'étudier les différents modes de travail des élèves dans des situations de recherche (encadré 3) ou au cours du processus d'apprentissage d'une notion donnée (Trouche 2000b). Elle permet aussi de constituer une *géographie de la classe*, qui présente un double intérêt :

- elle donne des indicateurs pour repérer, à un moment donné, un élève par rapport aux cinq pôles (il ne s'agit pas bien sûr de réaliser une partition de l'ensemble des élèves) ;

- elle permet de suivre l'évolution des genèses instrumentales.

Elle a ainsi permis de repérer les évolutions des modes de travail dans la classe, lors du passage d'un environnement de calculatrices *graphiques* à un environnement de calculatrices *symboliques* :

- la place du travail instrumenté dans l'activité générale des élèves *augmente* pour chacune des catégories repérées. La calculatrice n'est plus utilisée à des seules fins d'illustration ou de vérification, mais devient *un constituant essentiel de l'activité* (Laborde, in Guin 1999) ;

- les genèses instrumentales aboutissent à des instruments de natures très différentes : *cahier de brouillon interactif* pour le mode de travail rationnel, *boîte à problèmes* pour le mode de travail théorique, *béquille* pour le mode de travail automate, *lanterne magique* pour le mode de travail bricoleur et *lunette panoramique* pour le mode de travail expérimentateur (Guin & Trouche, in Guin 1999) ;

- les différences en matière de *contrôle* de l'activité sont *fortement accentuées* : ce contrôle devient très faible pour les modes de travail bricoleur ou automate.

Des analyses des modes de travail apparaissent dans d'autres travaux :

- Hershkowitz & Kieran (in Van den Heuvel & Panhuizen 2001) distinguent par exemple deux modes de travail, liés aux méthodes différentes de *coordination des*

représentations en environnement calculatrice graphique □«□ *mechanistic-algorithmic way (where students combine representatives in non-thinking, rote ways) and a meaningful way*□□,

- Weigand & Weller (2001) étudient *the relationship between actions or working styles on one hand, and the understanding of development of concepts on the other*.

La prise de conscience de cette dispersion des comportements impose la mise en œuvre de dispositifs spécifiques permettant *d'assister* les genèses instrumentales□ les *stratégies didactiques d'ostension* (Brousseau (1998) désigne ainsi la pratique d'enseignement où le professeur, *montrant* un objet, pense le faire *comprendre*) ne suffisent pas pour influer sur *l'économie* du travail mathématique et pour développer le *contrôle* sur sa propre activité (en particulier l'activité instrumentée).

Encadré 3. Illustration de la typologie des modes de travail

On illustre cette typologie à partir d'un travail (Trouche, 1996b) proposé à une classe de terminale scientifique (12e grade), dont tous les élèves disposent d'une calculatrice symbolique TI-92. Il s'agit de déterminer la n[ième] dérivée de la fonction f définie sur R par f(x) = $e^x(x^2+x+1)$.

Les calculatrices symboliques ne donnent pas la réponse générale (figure a)□ cependant la syntaxe d(f(x), x, n), communiquée aux élèves, donne une expression de la dérivée n[ième] *pour des valeurs particulières*, entières positives, de n. La détermination des dérivées n[ième] de la fonction f, pour plusieurs valeurs de n, peut permettre de conjecturer (ce qui suppose une bonne organisation de la recherche et quelques qualités d'observation) une expression générale pour la dérivée n[ième].

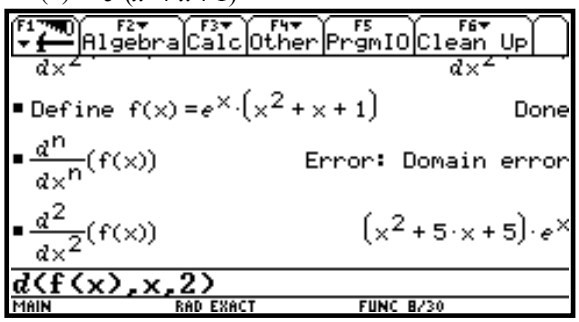


Figure a

Ce travail va susciter différentes démarches de recherche chez les élèves. De nombreuses techniques sont mises en œuvre, faisant appel au papier-crayon, à la calculatrice ou à une *combinaison* des deux. On peut utiliser la typologie pour décrire théoriquement cinq modes de travail :

- un mode de travail théorique□ l'élève commence par déterminer les deux premières dérivées à la main. Il constate□ «□on trouvera toujours une fonction sous la forme d'un produit de la fonction exponentielle et d'un polynôme de degré 2□»□ puis□ «□le coefficient de x^2 sera toujours 1□ pour le coefficient de x, on ajoute à chaque fois 2, on trouvera donc 1 et 2 fois quelque chose□ pour le coefficient de x, c'est la somme des deux coefficients précédents□». Pour ce dernier coefficient, l'élève a une première idée□ «□cela me rappelle le triangle de Pascal, où chaque combinaison est la somme de deux combinaisons de rang inférieur□». Puis□ «□cela revient à faire la somme de nombres impairs successifs, c'est un exercice connu, on doit trouver un carré□». La calculatrice est alors utilisée pour vérifier ce résultat général.
- un mode de travail rationnel□ l'élève fait quelques dérivées successives papier-crayon, puis quelques dérivées avec la calculatrice. Tous les résultats sont notés sur le papier. Une conjecture surgit assez vite□ la dérivée n[ième] semble être de la forme $e^x(x^2+(2n+1)x+n^2+1)$. La preuve est alors apportée grâce à un raisonnement par récurrence, réalisé papier-crayon.
- un mode de travail automate□ pour plus de sûreté, les dérivées sont calculées papier-crayon et avec la calculatrice. Les calculs sont longs, parce que les techniques de base sont mal maîtrisées□ ainsi la fonction est entrée dans la calculatrice sous la forme e^{x^2+x+1}, ce qui rend difficile la comparaison avec les résultats obtenus sans la calculatrice. Étant donnée l'impossibilité de trouver une cohérence entre les différents résultats, ce sont les résultats fournis par la calculatrice pour les premières dérivées qui sont donnés, sans qu'il soit possible d'imaginer une formule générale.
- un mode de travail bricoleur□ la fonction est entrée rapidement dans le répertoire de fonctions de la calculatrice. De très nombreuses dérivées successives sont recherchées, jusqu'à ce que l'idée du résultat général émerge. La preuve est alors apportée par l'accumulation de résultats concordants (l'élève dit au professeur□ «□la formule marche pour n'importe quelle valeur de n. La preuve□ donnez-moi la valeur que vous voulez, vous verrez que cela marchera□»). Tout le travail est réalisé sur machine, sans trace écrite.
- un mode de travail expérimentateur□ les calculs sont réalisés en même temps papier-crayon et avec la calculatrice. Pour trouver une forme générale, de nombreuses techniques sont utilisées : factorisation, développement des expressions, calcul de la dérivée n[ième] pour de petites valeurs et de grandes valeurs de n. La formule générale est conjecturée. La preuve repose d'abord sur le fait que la formule est vérifiée par tous les calculs (papier-crayon et avec la calculatrice), mais aussi sur des observations plus générales («□ chaque fois on ajoute 2, c'est normal que le coefficient de x soit 2n+1□»).

5) Les *orchestrations instrumentales*, définition, nécessité et illustration

La difficulté de coordonner les registres sémiotiques (§ 3.3) et de contrôler les perceptions (§ 4.2) est accrue dans des environnements technologiques complexes (§ 1, 3.2) qui proposent une multiplicité d'outils (§ 2.5), ouvrant de nouvelles possibilités et prescrivant relativement l'action de l'utilisateur (§ 2.4). Éviter une déperdition d'instrumentalité ou de sémioticité (§ 3.3) et limiter la dispersion des modes de travail des élèves (§ 4.3) suppose, d'une part la construction de nouvelles praxéologies (§ 2.1) justifiant et contrôlant les techniques instrumentées, et d'autre part de nouvelles organisations didactiques *assistant* les genèses instrumentales. Ces notions de *guidage*, *d'accompagnement* et *d'assistance*[11] émergent de toutes les recherches récentes sur les apprentissages en environnement informatique : pour Linard (2001), il s'agit d'*accompagner et provoquer, non superviser, la prise de conscience et l'autocontrôle de ses actions par l'apprenant* ; pour Ruthven (1997), *the degree to which this [CAS] technology is likely to be productive in the classroom will be highly dependent on the avaibility of proven models and exemplars to guide teachers and students in its use.* Cette nécessité ne découle pas naturellement des pratiques professionnelles : Artigue & al (1998) montrent que, pour les professeurs, *la tendance naturelle à l'assimilation peut conduire à minimiser l'importance de la gestion nécessaire par l'enseignement de l'instrumentation.*

5.1 *Système de travail*, système d'instruments

Rabardel (in Bailleul 2000) définit un *système d'instruments* comme résultant, pour un individu, d'une genèse instrumentale (§ 2.2) combinant un *ensemble d'outils.* Cette notion rejoint celle de *système de travail* que définit ainsi (Chevallard 1996) : *le travail mathématique suppose un travail que je dirai, sinon métamathématique, du moins épimathématique. Travail sur les instruments du travail, et sur leur emploi ; travail au second degré en quelque sorte, qui fait partie du travail mathématique (…) Notre mathématicien travaille. Il manipule ce que j'appellerai provisoirement des outils – les outils du travail mathématique – et cela de manière réglée, au sein d'un système local, souvent évolutif, parfois même labile. Je nomme un tel système un système de travail.* Un système d'instruments est donc *propre à un individu*, mais il résulte d'un processus à la fois individuel et *social* :

- il est social *par nature*, du fait des connaissances incorporées dans les artefacts (§ 2.2) et des *rapports* que tout individu entretient avec l'institution de travail ou d'étude (§ 2.1) dans laquelle il s'inscrit ; Rabardel & Samurçay (2001) précisent que les schèmes d'utilisation *ont la caractéristique de schèmes sociaux : ils sont élaborés et partagés dans des communautés de pratique et peuvent donner lieu à appropriation par les sujets, voire relever de processus de formation explicite* ;
- il est social *par intérêt*, du fait de la productivité de ce que Changeux (2002) appelle les *réseaux cognitifs intercérébraux : c'est par le partage interpersonnel et l'échange de représentations, de concepts et de points de vue que surgit brusquement ce que Hadamard appelle une « illumination », certes dans un cerveau individuel.*

L'introduction d'un nouvel artefact, fréquente dans un contexte de foisonnement technologique, rencontre des systèmes d'instruments déjà constitués. La gestion didactique de cette situation est une question que Rabardel (in Bailleul 2000) juge cruciale : *quels artefacts*

[11] Je distingue d'une part les termes de *contrôle* et de *pilotage*, employés dans le sens de *self-control* (§ 1.2, 2.1, 2.3, 2.4, 4.1, 4.2, 4.3) et d'autre part les termes de *guidage*, *d'accompagnement* et *d'assistance*, employés dans le sens *d'aide*, par l'institution, au développement des genèses instrumentales des individus (§ 1.3, 2.4, 4, 5.2).

faut-il proposer aux apprenants et comment les guider dans les genèses instrumentales et dans l'évolution et l'équilibrage de leurs systèmes d'instruments ? Pour quelles activités d'apprentissage et quelles constructions des savoirs mathématiques ?

5.2 Entre hardware et software didactiques, les *dispositifs d'exploitation didactique*

Chevallard (in Cornu 1992) évoque *l'intégration* et la *viabilité* des objets informatiques dans un environnement donné. Nous considérons ici un *environnement d'apprentissage informatisé* (Basque & Doré 1998), c'est-à-dire :
- un lieu, réel ou virtuel (il s'agira ici d'une salle de classe), abritant des individus et des artefacts ;
- un lieu dédié à l'apprentissage. Un environnement d'apprentissage est aussi un environnement d'enseignement ; l'accent mis sur l'apprentissage suggère une attention particulière portée à l'initiative et à la possibilité de faire des choix pour l'apprenant ;
- un lieu qui inclut des artefacts informatiques susceptibles de soutenir les démarches des apprenants. Ce ne sont pas nécessairement les seuls artefacts disponibles. Ils ne prennent pas nécessairement en compte la dynamique de l'apprentissage ; en ce sens, la notion d'environnement d'apprentissage informatisé est plus large que la notion d'EIAH.

Chevallard (ibidem) utilise une métaphore informatique pour distinguer trois niveaux dont l'interaction est essentielle pour *l'implémentation didactique* d'outils informatiques :
- le *hardware didactique,* formé des composants matériels de l'environnement : artefacts divers (calculatrices, rétroprojecteur, logiciels d'enseignement…), mais aussi modes d'emploi, fiches techniques etc.
- le *software didactique* qui est constitué par les séquences d'enseignement elles-mêmes ;
- le *système d'exploitation didactique*, niveau essentiel qui permet de tirer parti des ressources potentielles de l'environnement ; il assure la coordination et l'intégration des deux premiers niveaux.

Il souligne l'importance de ce troisième niveau, le système d'exploitation didactique, sans lequel les composants du hardware didactique risquent fort d'être entièrement écartés de la scène de l'enseignement. Au lieu de *système*, je préfère parler ici de *dispositif* pour bien marquer la composante *d'intentionnalité* qui distingue un dispositif d'un système[12]. *Concevoir* des dispositifs d'exploitation didactique des environnements informatisés, c'est l'objet de l'*ingénierie didactique*[13] dont Artigue (2000, in Guin et Trouche 2002) donne des exemples de réalisation.

Je définis un dispositif d'exploitation didactique comme une suite finie de *scénarios d'exploitation didactique*. Un scénario d'exploitation didactique organise la *mise en scène* de *situations* données dans un *environnement* donné.

La notion de situation est au cœur de la théorie développée par Brousseau (1998). Une *situation adidactique* est une situation de résolution d'un problème dans lequel n'apparaît pas d'intention didactique et au cours de laquelle le professeur se refuse à intervenir comme proposeur des connaissances qu'il veut voir apparaître et qui sont des conditions de la résolution de ce problème. Il s'agit en fait d'un *idéal vers lequel il s'agit de converger (…)* :

---

[12] Cf. sur ce point les actes du colloque « Le dispositif, entre usage et concept », 1998, Louvain La Neuve, www.comu.ucl.ac.be/reco/grems/agenda/dispositif/colloque.html.

[13] (Chevallard, in Cornu 1992) évoque « le problème de l'ingénierie didactique » dont Artigue (2000) évoque la genèse au sein de la communauté didactique française. L'expression *ingénierie didactique* recouvre dans la littérature deux notions, se situant à des niveaux différents : le niveau de la *conception* (didactical engineering) et le niveau du *produit réalisé* (*engineering designs* ou *engineering products*). Nous utilisons dans ce document l'expression au premier sens de *conception* de dispositifs d'exploitation didactique.

cette situation (adidactique) ou ce problème choisi par l'enseignant est une partie essentielle de la situation plus vaste suivante : le maître cherche à faire dévolution à l'élève d'une situation adidactique qui provoque chez lui l'interaction la plus indépendante et la plus féconde possible (…) L'enseignant est donc impliqué dans un jeu avec le système des interactions de l'élève avec les problèmes qu'il lui pose. Ce jeu ou cette situation est la situation didactique (Brousseau ibidem).

C'est ce même *jeu* qu'évoque Artigue (in Guin & Trouche 2002) : *l'ingénierie ne se situe pas ici dans la perspective d'un fonctionnement adidactique (…). Un problème global peut certes être identifié : faire sens mathématiquement d'un certain type de phénomènes numérico-graphiques, mais ce problème éclate en une succession de sous-problèmes, dans un scénario étroitement piloté par l'enseignante. Les choix sont pensés pour donner, dans chaque phase, une autonomie maximale aux élèves mais les jeux de l'élève (pris individuellement) du groupe d'élèves, de l'enseignante sont étroitement imbriqués, pour permettre justement cette prise d'autonomie (…).*

Je me place dans le cadre de la situation didactique plus vaste évoquée ci-dessus pas Brousseau, qui contient, *localement* ou *idéalement* une situation adidactique : localement parce que certaines *phases* de la situation se dérouleront sur un mode adidactique, idéalement parce que c'est en fonction de l'objectif de mettre en place une telle situation que sont pensés les choix du scénario.

Un scénario d'exploitation didactique réalise la mise en scène d'une situation sur deux plans imbriqués. Il définit, intègre et coordonne :
- les *modes de gestion* de la situation elle-même ;
- les *modes de gestion* des artefacts.

Il produit des *milieux didactiques*, qui vont agir sur l'élève et sur lesquel l'élève va agir (Brousseau 1998).

Les modes de gestion des artefacts apparaissent dans les systèmes de travail, la plupart du temps, comme des points aveugles ou des chaînons manquants, l'essentiel de l'attention étant portée sur le *contenu* des activités. C'est sans doute à la fois la marque d'une hypothèse constructiviste qui privilégie *l'activité propre de l'élève* par rapport aux *phases collectives* (Laborde, in Guin 1999) et d'une conception qui considère les artefacts comme *extérieurs à l'activité* elle-même (Bosch & Chevallard 1999). Pour définir ces modes de gestion, j'introduis la notion *d'orchestration instrumentale*.

5.3 D'un ensemble d'outils vers un système d'instruments, les orchestrations instrumentales

Une orchestration instrumentale prend en compte la nécessité de guider les apprenants dans les genèses instrumentales et dans l'évolution et l'équilibrage de leurs systèmes d'instruments (Rabardel ibidem). Elle est définie par des *configurations didactiques* (c'est-à-dire des *agencements* des artefacts de l'environnement, correspondant à chaque phase d'une situation), leurs *modes d'exploitation* et leur *articulation*.

La conception d'une configuration didactique répond à des objectifs didactiques : des objectifs principaux, fondant la nécessité de cette configuration et des objectifs secondaires, liés aux modes d'exploitation choisis.

Je distingue trois niveaux de configurations, liés aux trois niveaux d'artefacts que Wartofsky (§ 2.5) distingue :
- les configurations de premier niveau, liées aux artefacts *primaires*, correspondant au concept d'outil tel qu'il est ordinairement utilisé ;
- les configurations de deuxième niveau, liées aux modes d'action des artefacts de premier niveau ;

- les configurations de troisième niveau, liées aux situations de simulation et aux méthodes réflexives d'auto-analyse de l'activité, propres ou collectives.

On trouvera dans (Guin & Trouche 2002) ou dans (Lagrange & Py 2002) des exemples de configurations de premier niveau, consistant pour l'essentiel en un paramétrage logiciel. Il ne s'agit pas de donner des leçons de méthode (Delozanne 1994), mais de *guider* la constitution d'un *instrument* de calcul de limite dans le premier cas, d'étude de variations de fonctions dans le deuxième cas.

Je présente ici des configurations de deuxième et troisième niveau.

i) Un exemple de configuration de deuxième niveau

J'ai proposé (Trouche 1997) une configuration qui concerne l'ensemble des élèves d'une classe et a pour *objectif principal* la socialisation (dans une certaine mesure) des genèses instrumentales des élèves. Elle repose (figure 2) sur la dévolution d'un rôle particulier à un élève de la classe : cet élève, appelé l'*élève-sherpa*[14], *pilote* la calculatrice rétroprojetée.

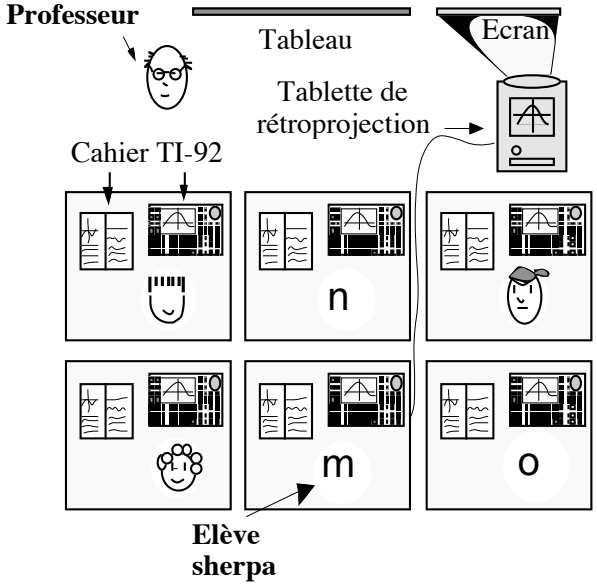


Figure 2. *La configuration de l'élève-sherpa*

Il va ainsi servir, à la fois pour le maître et pour la classe, de référence, de guide, d'auxiliaire et de médiateur. L'orchestration de cette configuration favorise une *gestion collective* d'une partie des processus d'instrumentalisation et d'instrumentation : ce que fait un élève avec sa calculatrice - les traces de son activité - , est vu par tous, ce qui lui permet d'apporter sa contribution à la constitution des instruments de la classe et donne des informations au maître sur ses schèmes d'action instrumentée en construction. Le maître peut aussi guider, à travers la calculatrice de l'élève-sherpa, l'ensemble des calculatrices de la classe (il ne réalise pas lui-même le geste instrumenté, mais assiste l'élève dans la mise en œuvre de ce geste) ; de plus, il peut combiner, pour son enseignement, les résultats obtenus « à la main » sur le tableau et les résultats obtenus par la calculatrice de l'élève-sherpa sur l'écran de la classe. Cela facilite, pour les élèves eux-mêmes, sur leur propre bureau, la combinaison du travail papier-crayon et du travail avec leur calculatrice. Le maître assure ainsi une fonction de *chef d'orchestre*, plutôt que *d'homme-orchestre*.

[14] Le mot *sherpa* fait référence d'une part à l'homme qui guide et porte la charge lors des expéditions himalayennes, d'autre part aux diplomates qui préparent les rencontres internationales.

Cette régulation, *élément structural fondamental de la relation didactique* (Sensevy & al 2000), va permettre de re-produire les lieux du professeur et des élèves, les temps de l'enseignement et de l'apprentissage, les objets des milieux des situations et l'organisation des rapports à ces objets. Plusieurs *modes d'exploitation* de cette configuration peuvent être envisagés, à partir de ses *variables* (le rétroprojecteur peut être allumé tout le temps ou non, le rôle de sherpa peut être attribué au même élève pendant toute la séance ou non, il peut être attribué à tour de rôle ou en fonction d'objectifs didactiques spécifiques de la séance ou de l'élève, etc.). En fonction des choix didactiques opérés, des *objectifs secondaires* de cette configuration peuvent apparaître : par exemple donner des moyens au maître pour réintégrer dans la classe des élèves marginaux ou en difficulté : la fonction d'élève-sherpa donne en effet un autre statut à un élève et impose au maître de *régler son pas* sur lui : le suivi sur le grand écran du travail de cet élève permet des rétroactions très rapides du maître et de la classe).

Cette orchestration instrumentale vise l'articulation, pour chaque individu, des différents instruments de son travail mathématique (les instruments construits à partir du papier-crayon ou de la calculatrice) et elle participe à la coordination de l'ensemble des instruments de la classe (*le réseau de travail* qu'évoque Changeux (2002)), l'interaction étant médiée par l'élève-sherpa et régulée par le maître.

ii) Un exemple de configuration de troisième niveau

J'ai introduit (Trouche, in Guin, 1999) une configuration, *l'observation-miroir* (figure 3), qui a pour objectif l'auto-analyse de l'activité[15]. Les élèves, dans le cadre d'un TP (travaux pratiques), sont regroupés par binômes. La moitié des binômes réalise la tâche mathématique proposée, l'autre moitié observe et relève les actions réalisées, à l'aide de deux artefacts :
- une tablette de rétroprojection pour capturer l'écran de la calculatrice d'un des élèves du binôme (celui qui n'est pas en charge du rapport de recherche) ;
- des feuilles d'observation pour relever, toutes les quinze secondes, l'ensemble des actions réalisées (ces feuilles se présentent sous la forme de grilles dans lesquelles les différents types de *gestes* (§ 2.1) sont repérés : les gestes papier-crayon, les gestes calculatrice, les gestes relatifs aux interactions et enfin les « divers », recouvrant des actions n'ayant rien à voir avec le problème traité).

[15] Vasquez Bronfman (2000) définit un dispositif du même type, le *practicum réflexif*, comme *un cadre, un parcours, conçu pour aider les apprenants à acquérir l'art de travailler dans les domaines incertains (ou indéterminés) de leur pratique.*

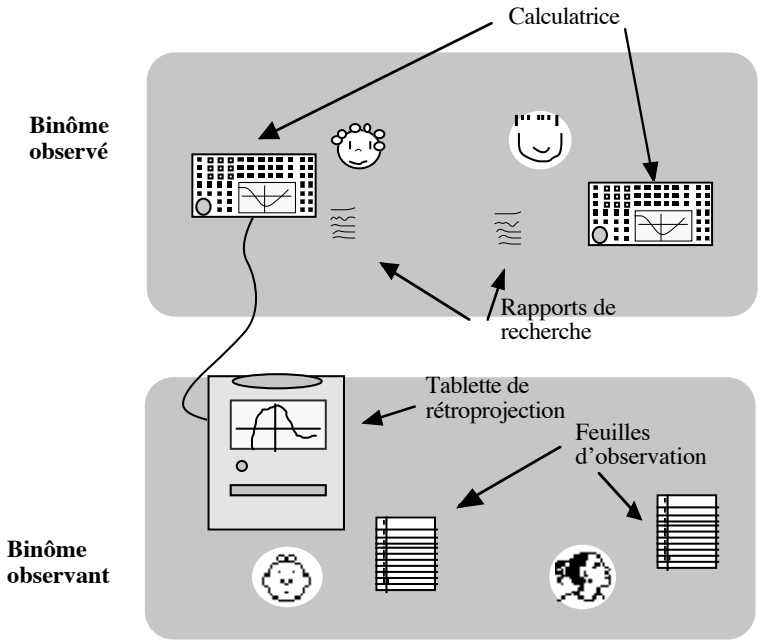


Figure 3. *La configuration d'observation-miroir*

L'orchestration instrumentale reposant sur cette configuration met l'accent non pas sur les résultats de l'activité, mais sur les formes que celle-ci revêt. Elle permet aux élèves «□en observant les autres, de s'observer soi-même□» (d'où le nom de *miroir* proposé pour ce type d'observation) et de construire ainsi une médiation réflexive□: pour la plupart des élèves observés, l'organisation de l'activité révélée par le bilan chronologique suscite d'ailleurs une grande surprise («□Comment, je n'ai lu l'énoncé que pendant 15 secondes□?□»). La prise de conscience des écarts entre ce que les élèves ont fait et ce qu'ils ont le souvenir d'avoir fait favorise une réflexion en profondeur sur les formes de l'activité, permet d'en comprendre certains défauts et d'en rectifier certains travers.

On retrouve dans les orchestrations instrumentales basées sur ces différentes configurations des éléments communs□: l'interaction entre les différents sujets, l'explicitation des démarches et la publication des traces de l'activité (l'écran de l'élève-sherpa et les relevés chronométrés d'activité). Ils concourent tous à renforcer la *dimension sociale* des schèmes d'action instrumentée, c'est-à-dire à prendre en charge collectivement une part de la genèse instrumentale pour assister la constitution des systèmes d'instruments.

5.4 Constitution de milieux et évolution d'un environnement informatisé d'apprentissage

L'orchestration instrumentale est la partie du scénario d'exploitation consacrée à la *conduite des instruments*. Elle prend en charge des artefacts présents dans l'environnement (pas nécessairement tous) et en ajoute éventuellement d'autres (cf. la tablette de rétroprojection pour l'élève sherpa, figure 2). Le scénario d'exploitation didactique articule les modes de gestion de la situation et les modes d'exploitation des artefacts (l'orchestration instrumentale). Il fournit, pour chaque phase de la situation, un nouveau milieu didactique pour les apprentissages mathématiques. Ce travail fait évoluer *localement* les systèmes d'instruments□(une situation didactique est l'occasion d'acquérir une connaissance donnée et fait donc évoluer certains instruments du système). Il permet de constituer, pour chaque phase, après l'immersion dans chaque milieu didactique, un nouvel environnement d'apprentissage. Un scénario d'exploitation didactique est ainsi le moteur de l'*évolution locale* d'un environnement informatisé d'apprentissage, au niveau de chaque phase et au

niveau de la situation globale. Un dispositif d'exploitation didactique est un agencement d'une suite de scénarios, exploitant un ensemble de situations liées aux connaissances à construire dans une institution donnée. C'est le moteur de *l'évolution globale* d'un environnement informatisé d'apprentissage. Je propose (figure 4) un schéma général décrivant ce dispositif.

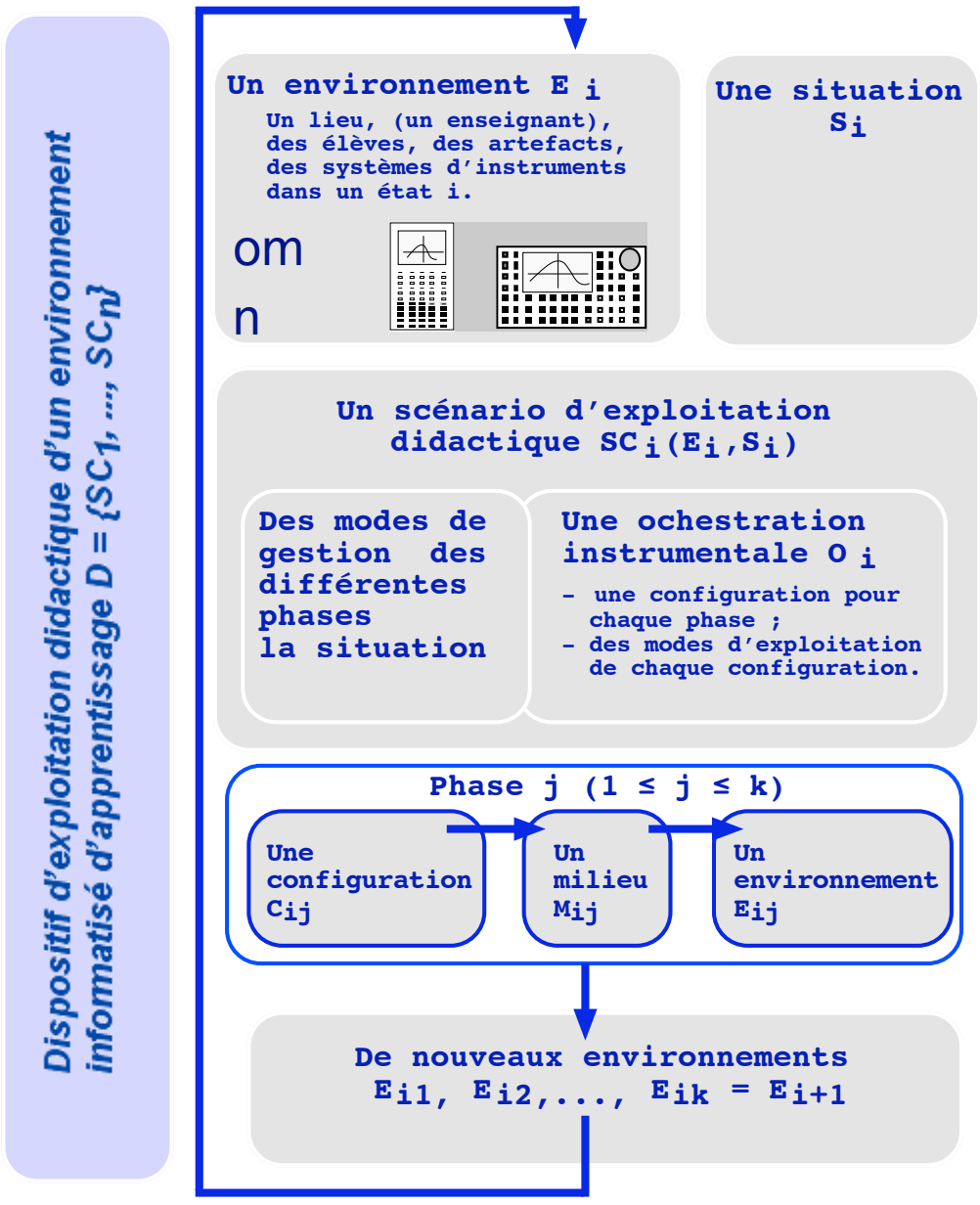


Figure 4. *Description d'un dispositif d'exploitation didactique d'un environnement informatisé d'apprentissage*

La distinction de ces différents niveaux me semble essentielle leur confusion peut avoir en effet deux conséquences néfastes
- elle peut aboutir à escamoter l'un des constituants du scénario d'exploitation (c'est souvent l'orchestration instrumentale qui, apparaissant transparente, c'est-à-dire comme allant de soi, disparaît)

- elle aboutit aussi souvent à mêler les niveaux de recherche et de développement□ le professeur apparaît alors, soit comme un partenaire dans la constitution des scénarios d'exploitation (ce qui ne facilite pas la phase de développement (Artigue 2000)), soit comme un professionnel polyvalent prenant en charge les fonctions d'ingénieur didacticien et d'enseignant (ce qui n'est pas raisonnablement possible (Chevallard, in Cornu 1992)).

Il reste à étudier la pertinence de ce modèle pour des environnements informatisés d'apprentissage différents de celui, classique, d'une classe «□rdinaire□, c'est-à-dire d'un ensemble d'apprenants réunis dans un lieu donné, en présence d'un professeur. Je pense en particulier aux environnements d'apprentissage en présence et à distance, pour lesquels il existe plusieurs lieux, réels ou virtuels, plusieurs formateurs et en général des systèmes d'instruments plus complexes, combinant les outils propres de la communication à distance et les outils sur lesquels porte la formation. Cette question, ouverte, constitue pour moi une perspective de recherche.

5.4 Les problèmes de *formation* que pose l'intégration des outils

La complexité de la *construction* et de la *conduite* des instruments dans les apprentissages mathématiques se traduit par une complexité accrue (Guin & Trouche 2001) du rôle du professeur dans les environnements technologiques complexes. La question de l'organisation et de la gestion par l'enseignant de la classe est assez peu prise en compte dans la littérature de recherche (Collectif CNCRE 2000). Pourtant, comme le souligne Burrill (2002) à propos des environnements de calculatrices graphiques, *teachers should be prepared to respond to problems highlighted in the research□ for example, the confusion about some features of the calculator such as scaling issues and failure of the technology to accurately represent discontinuities. Teachers should be involved in helping students learn how to use the calculator with full recognition of its constraints and potential. They should also understand various profils of student behavior in order to design and implement appropriate mathematical activities using handheld graphing technology*. La viabilité de l'intégration des outils informatiques dans la classe de mathématiques nécessite donc une réelle formation des enseignants (Artigue 1998□ Artigue, in Guin & Trouche 2002).

Les dispositifs de formation, initiale ou continue, pour assurer cette préparation des enseignants à un renouvellement de leurs pratiques professionnelles, inexistant dans l'enseignement supérieur (Dejean 2002), ont été analysés pour l'enseignement de second degré par Abboud (1994)□ basés sur des stratégies de *monstration* (présentation et description de situations) ou *d'homologie* (mise en situation des stagiaires, en position d'élève, dans l'objectif qu'ils reproduisent ensuite les mêmes situations dans leur classe (Kuzniak 1994)), ils reposent sur des contenus fortement personnalisés et ne permettent pas en général, pour les enseignants, *le passage à l'acte pédagogique* (Guin 2001). Quand les enseignants néophytes tentent de transposer dans leurs classes les situations qui leur ont été proposées en formation, ils le font sur le même modèle monstratif, en jouant le rôle d'homme (de femme) orchestre, assurant les tâches mathématiques usuelles et les nouvelles tâches de gestion des outils de calcul et ne favorisant pas une socialisation des genèses instrumentales (Bernard & al 1997). (Sohkna 2002) montre que ces enseignants considèrent comme allant de soi les techniques instrumentées élémentaires et qu'ils ont beaucoup de difficultés à faire face aux résultats surprenants fournis par les outils de calcul. Etre un enseignant expert dans l'utilisation d'outils mathématiques complexes ne suffit cependant pas pour assurer l'intégration de ces outils dans une classe (Noguès & Trouche, in Bailleul 2000).

Vivet (1991) introduit la notion de *scénarios d'usage*, éléments de base de *schémas d'organisation pédagogique* de la classe. (Laborde, in Guin 1999) décrit un scénario comme étant *la description du déroulement prévu d'un enseignement donné, comportant non seulement la présentation de la séquence et de ses objectifs, les documents utilisés par les élèves, mais aussi des documents d'accompagnement devant faciliter la mise en œuvre de la séquence en classe par un enseignant n'ayant pas participé à son élaboration.* (Allen & al 1995) relient ces scénarios d'usage à l'organisation d'un *réseau évolutif* d'enseignants chargé d'élaborer et de tester ces scénarios à partir de propositions d'experts. Guin & al (2002) présentent une mise en œuvre de ces idées autour de scénarios d'intégration de fichiers informatiques présentant des *figures animées.*

Plus récemment, cette nécessité *d'accompagner* les enseignants de manière continue dans la conception de ressources pédagogiques et dans leur mise en œuvre au niveau de la classe a donné lieu à la mise en place de dispositifs de formation à distance. Le SFODEM (Suivi de FOrmation à Distance pour les Enseignants de Mathématiques), piloté par l'IREM de Montpellier depuis septembre 2000, est passé à une phase opérationnelle depuis septembre 2002. Le SFODEM regroupe plusieurs thèmes de formation, l'objectif étant de repérer, à travers la diversité de ces thèmes, les *invariants* dans l'organisation pédagogique et la structure des ressources. Le bilan de la phase expérimentale a été tiré (Guin, Joab & Trouche 2003). Il fait apparaître des résultats intéressants, en matière de conception et de réalisation de ressources pédagogiques, entre la première et la deuxième année d'expérimentation (cf. figure 5) :

- une *fiche d'identification*, conçue en relation avec les *normes* actuellement élaborées pour les ressources pédagogiques (Guin, Joab & Trouche 2003), permet le repérage de chaque ressource. Elle donne les caractéristiques principales de l'activité pour permettre à l'utilisateur de la sélectionner pertinemment, au regard de son programme de travail et de son environnement technologique ;
- la *structure* de ces ressources s'enrichit et se clarifie. Un scénario d'usage apparaît, il est détaché de *la fiche élève* et de *la fiche professeur* et (relativement) des éléments techniques. Il présente, pour les enseignants, des éléments portant sur le scénario d'exploitation et les orchestrations instrumentales, leur configuration et leurs modes d'exploitation, éventuellement remis en cause ou enrichis à partir de *compte-rendus d'expérimentation* ;
- l'écriture des ressources est épurée ; elle permet de distinguer les niveaux technique et pédagogique. La rédaction de ressources indépendamment d'un logiciel particulier fait apparaître les fonctions du logiciel de façon générique et non les actions de bas niveau. Cette évolution favorise une prise de distance des concepteurs par rapport à l'outil. Elle favorise également pour les utilisateurs l'appropriation, la mutualisation et l'exploitation des ressources dans différents environnements technologiques.

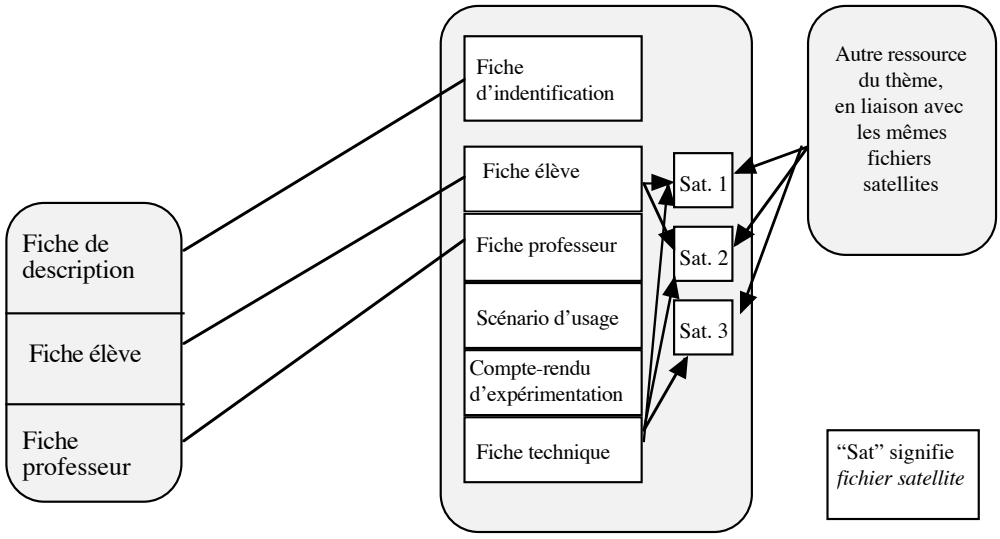


Figure 5. *L'évolution des ressources constituées pour la formation à distance (Guin & al 2003)*

Ce travail de constitution de ressources pédagogiques vivantes se poursuit dans le SFODEM pour sa phase opérationnelle, il se prolonge aussi depuis septembre 2002 dans le cadre de la FODESIT (FOrmation Des Enseignants du Supérieur à l'Intégration des Technologies, dispositif mis en place par l'IREM de Montpellier), dans le domaine de l'intégration du calcul formel dans les enseignements de mathématiques des premiers cycles universitaires.
Ces deux dispositifs, au pilotage desquels je participe, sont un cadre très intéressant pour étudier la pertinence de l'approche instrumentale au niveau des *ressources pédagogiques*, celles-ci sont alors considérées elles-mêmes comme des *artefacts*, qui deviendront des *instruments* intégrés dans une pratique professionnelle au cours d'une genèse. L'utilisateur est alors collectif, au sens d'une *communauté de pratique*. L'influence réciproque entre *compte-rendus d'expérimentation* et *scénarios d'expérimentation* assure, en fonction du temps, le jeu des processus *d'instrumentation* et *d'instrumentalisation*. En ce sens, ces ressources pédagogiques sont bien *évolutives*.
Cette recherche est importante, à un moment de foisonnement de ressources pédagogiques sur la toile, la plupart du temps difficilement identifiables, peu structurées et difficilement transférables (à la pratique d'un utilisateur autre que le concepteur lui-même) et mutualisables.
Les dispositifs de formation à distance posent aussi, à un autre niveau que celui d'une classe, des problèmes de conception de scénarios d'exploitation didactique (en particulier des orchestrations instrumentales) d'environnements complexes, combinant différents lieux, différents acteurs et différents types d'outils : la plate-forme de communication à distance, les ressources pédagogiques, les TICE sur lesquels porte la formation. Entre la première et la deuxième année d'expérimentation du SFODEM (Guin, Joab & Trouche ibidem) est apparue la nécessité de préciser les *places, rôles* et *engagements* de chaque acteur, et les *règles de fonctionnement* et *modes de régulation* du dispositif. Le dispositif d'exploitation de la plate-forme est ainsi précisé à partir de l'élaboration de *chartes* qui fixent les responsabilités des différents intervenants (formateurs et stagiaires). Une nouvelle organisation du processus de *production* et de *mutualisation* des ressources apparaît à partir de la mise à disposition, sur la plate-forme, de *germes de ressources* ou de *fiches de projets*. De cette expérimentation

émergent une nouvelle organisation de la formation, de nouveaux rapports des formateurs et des stagiaires avec la formation, une nouvelle structure des ressources pédagogiques.
Concevoir, à partir de ces éléments, un dispositif d'exploitation d'un tel environnement, dans le prolongement du modèle construit pour une classe (cf. figure 4), reste à faire.

Mes recherches concernaient au départ l'intégration des calculatrices graphiques dans l'enseignement des mathématiques. Elles se sont étendues aux calculatrices symboliques (Trouche 2000b). Ce terrain est apparu particulièrement fructueux, pour deux raisons :
- les calculatrices sont des outils à disposition permanente des élèves. Les processus de constitution des instruments qui en résultent sont donc beaucoup plus riches que pour des outils épisodiques, rencontrés dans le seul cadre de la classe ;
- les logiciels de calcul formel intégrés sur ces plate-formes ne sont pas, au départ, dédiés à l'enseignement. L'analyse des contraintes de cet outil en relation avec les usages puis la définition d'orchestrations instrumentales permettant l'aménagement de l'environnement technologique (ou la définition de nouvelles spécifications), enfin l'analyse des usages du nouvel environnement permettent de concevoir un instrument comme produit d'une construction dans laquelle les usagers prennent une part active.
En cela, ce travail de recherche peut avoir des prolongements pour la conception et l'étude d'autres environnements informatisés d'apprentissage, au-delà du seul cadre des calculatrices et de l'enseignement des mathématiques.
Dans l'immédiat, les domaines de la conception de ressources pédagogiques et de dispositif de formation ouverte à distance constituent pour moi des perspectives de recherches importantes, dans le cadre des communautés EIAH et de didactique des mathématiques.

6) Conclusion

Mes recherches, depuis la soutenance de ma thèse (Trouche 1997) se sont inscrites dans plusieurs perspectives :
- une perspective *anthropologique* visant à repérer les problèmes d'intégration technologique dans leur évolution (au cours du temps) et dans leurs invariants (par rapport à l'activité humaine). Cette étude fait apparaître une complexification, une miniaturisation, un regroupement des outils, un renforcement de la place des images dans les artefacts, une évolution des rapports de l'homme à l'outil (l'outil devient prothèse) et des rapports de la société aux outils (la technique devient politique). Cette généralisation permet de mieux comprendre le développement des outils dans le travail mathématique et les résistances *culturelles* et *professionnelles* (essentiellement dans l'enseignement) qui se font jour ;
- une perspective *instrumentale* visant à fournir une méthode d'étude des processus de conceptualisation des mathématiques en environnement informatique. Cette approche met en évidence les *contraintes* qui s'exercent sur l'activité de l'élève et influent (même au niveau des *gestes* élémentaires) sur la conceptualisation : la genèse instrumentale, construction d'un instrument mathématique à partir d'un artefact, et la conceptualisation sont des processus duaux. Cette étude met en évidence *trois niveaux de contraintes* et un changement important, par la transposition informatique, de *l'instrumentalité* et de la *sémioticité* des ostensifs mathématiques. La mise en évidence des *catachrèses* fournit des pistes pour une contribution des usagers à la conception des environnements ;
- une perspective *cognitive* visant à comprendre et à décrire la *dispersion des modes de travail mathématique* dans les environnements technologiques complexes (AS, § 4) ;
- une perspective *d'ingénierie didactique* visant à préciser les dispositifs d'exploitation didactique des environnements informatisés d'apprentissage mathématique (AS, § 5).

Ces recherches mettent en évidence la nécessité de prendre en compte, pour l'implémentation didactique des artefacts, le niveau *des orchestrations instrumentales*, c'est-à-dire de la *configuration didactique* et de ses *modes d'exploitation*. Elles donnent des éléments pour le développement de *ressources pédagogiques* à destination des enseignants, favorisant la constitution de nouveaux *systèmes d'instruments*. Elles rejoignent les perspectives de recherche et questions vives que (Baron & Bruillard 2002) relèvent pour les technologies de l'éducation, en particulier l'appréciation de Derycke, dans ce dernier ouvrage, selon laquelle *la réalité complexe du E-Learning demande une approche par multiples points de vue, dans une approche pluridisciplinaire où non seulement des spécialistes des STIC, ceux des sciences de l'éducation, de la didactique des disciplines, ou de la psychologie seraient conviés, mais aussi où d'autres disciplines, notamment issues des sciences humaines comme l'anthropologie, participeraient.*

La création du département STIC du CNRS va dans le même sens□*ces problèmes [liés aux recherches sur les EIAH] sont clairement à l'interface de l'informatique et des disciplines impliquées dans l'étude des phénomènes d'éducation et de formation (épistémologie, psychologie, pédagogie, didactique, ergonomie, sociologie,□.), mais cette interface est profonde□ elle demande que soient revisitées bien des questions spécifiques de l'informatique□ modélisation des connaissances, du raisonnement, de l'interaction, ergonomie des interfaces etc*. (texte du Réseau Thématique Pluridisciplinaire STIC, Apprentissage, éducation et formation, 2 juillet 2002).
L'interface est profonde, les questions vives nombreuses□ les prendre en compte est une nécessité si l'on vise, dans l'enseignement, une intégration des outils tout à la fois plus large et plus efficace du point de vue de l'apprentissage.

REFERENCES

ABBOUD B. (1994). *L'intégration de l'outil informatique à l'enseignement des mathématiques: symptôme d'un malaise,* Thèse de doctorat, IREM, Université Paris VII.

ALLEN R., WALLACE M. & CEDERBERG J. (1995). Preparing Teachers to Use Geometry Exploration Software, *Proceedings of the Seventh International Congress on Mathematics Education.*

ANDERSON J.R. (2002). Learning mechanisms for instruction, Colloque Ecole et Sciences Cognitives, *Les apprentissages et leurs dysfonctionnements*, 17-18 juin 2002, Ministère de la recherche, Paris.

ARTIGUE M. (1995). Une approche didactique de l'intégration de l'EIAO à l'enseignement, in D. Guin, D. Py & J.-F. Nicaud (eds), *Environnements Interactifs d'Apprentissage avec Ordinateur*, Editions Eyrolles, 17-28.

ARTIGUE M., DEFOUAD B., DUPERIER M., JUGE G. & LAGRANGE J.-B. (1998). *Intégration de calculatrices complexes dans l'enseignement des mathématiques au lycée*, IREM, Université Paris VII.

ARTIGUE M. (1998). Teacher training as a key issue for the integration of computer technologies*,* in Tinsley D. & Johnson D.C. (eds), *Information and communication technologies in school mathematics*, London, Chapman & Hall, 121-129.

ARTIGUE M. (2000). Didactic engineering and the complexity of learning processes in classroom situations, in C. Bergsten, G. Dahland & B. Grevholm (eds), *Proceedings of the MADIF2 Conference*, Gothenburg, janvier 2000, Swedish Society for Research in Mathematics Education, 5-20.

BAILLEUL M. (ed) (2000). Les instruments dans la pratique et l'enseignement des mathématiques. *Actes de l'école d'été de didactique des mathématiques,* IUFM de Caen.

NOGUÈS M. & TROUCHE L. Quelle prise en compte des contraintes didactiques dans des environnements technologiques complexes? 307-314.

RABARDEL P. Eléments pour une approche instrumentale en didactique des mathématiques, 203-213.

BALACHEFF.N. (1994). Didactique et intelligence artificielle. Recherches en Didactique des Mathématiques, Vol. 14 (1/2), 9-42.

BARON G.-L. & BRUILLARD E. (1996). *L'informatique et ses usagers dans l'éducation,* PUF. BARON G.-L. & BRUILLARD E. (eds) (2002). Les technologies en éducation. Perspectives de recherche et questions vives, *Actes du Symposium international francophone*, Paris, 31 janvier-1er février 2002, INRP.

DERICKE A. Sept questions sur le E-Learning? vers une problématique nouvelle pour la recherche, 27-39.

BALACHEFF N. Contribution à la réflexion sur la recherche sur les environnements informatiques pour l'apprentissage humain, 193-201.

BARTHES R. (1980). *L'empire des signes*, Flammarion.

BASQUE J. & DORÉ S. (1998). Le concept d'environnement d'apprentissage informatisé, *Journal of Distance Education / Revue de l'Enseignement à distance*, vol.13-1, 1-20.

BERNARD R., FAURE C., NOGUÈS M. & TROUCHE L. (1996). L'intégration des outils de calcul dans la formation initiale des maîtres, *Rapport de recherche IUFM-MAFPEN*, IREM, Université Montpellier II.

BOSCH M. & CHEVALLARD Y. (1999). La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.19 (1), 77-124.

BOULLIER D. (2001). Les choix techniques sont des choix politiques? les dimensions multiples d'une expérience de formation à *distance, Sciences et Techniques Educatives* 8/2001, IHM, Hermès, 275-299.

BROUSSEAU G. (1998). *Théorie des situations didactiques*, collection blanche (dir. N. Balacheff), Editions La Pensée Sauvage.

BURRIL G. (2002). *Handheld Graphing Technology in Secondary Mathematics? Research Findings and Implication for Classroom Practice*, USA?Texas Instruments.

CAME (2001). Computer Algebra in Mathematics Education Symposium, *Communicating Mathematics through Computer Algebra Systems,* Freudenthal Institute, Utrecht University, The Netherlands, July 18–19, 2001, http://ltsn.mathstore.ac.uk/came/events/freudenthal/

ARTIGUE M. Learning Mathematics in a CAS Environment? The Genesis of a Reflection about Instrumentation and the Dialectics between Technical and Conceptual Work (16p.).

HEID K. Theories that Inform the Use of CAS in the Teaching and Learning of Mathematics (13p.).

STACEY K. Teaching with CAS in a Time of Transition (11p.).

CARTIER P. & CHEMLA K. (2000). La création des noms mathématiques? l'exemple de Bourbaki, in D. Rousseau & M. Morvan (eds), La dénomination, *Le Temps des savoirs*, n°1, Editions Odile Jacob, 153-170.

CHANGEUX J.-P. (2002). *L'homme de vérité*, Editions Odile Jacob.

CHEVALLARD Y. (1996). Les outils sémiotiques du travail mathématique, *Petit x* , vol.42, 33-57.
CHEVALLARD Y. (1999). L'analyse des pratiques enseignantes en théorie anthropologique du didactique, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.19 (2), 221-266.
COLE M. (1995). Socio-cultural-historical psychology : some general remarks and a proposal for a new kind of cultural-genetic methodology, in J.V. Wertsch, P. Del Rio & A. Alvarez (eds), *Sociocultural Studies of Mind*, Cambridge University Press.
Collectif CNCRE (2000). De l'analyse de travaux concernant les TIC à la définition d'une problématique de leur intégration dans l'enseignement, *Rapport de recherche*, IREM, Université Paris VII.
CORNU B. (ed) (1992). *L'ordinateur pour enseigner les mathématiques*, PUF.
CORNU B. L'évolution des mathématiques et de leur enseignement, 13-95.
RAUZY R. L'informatique conduit-elle à des mathématiques nouvelles?, 97-117.
CHEVALLARD Y. Intégration et viabilité des objets informatiques, 183-203.
DAGHER A. (1996). Apprentissage dans un environnement informatique: possibilité, nature, transfert des acquis, *Educational Studies in Mathematics*, vol.30, 367-398.
DEBRAY R. (1992). *Vie et mort de l'image, une histoire du regard en Occident*, Gallimard.
DEBRAY R. (2001). *Dieu, un itinéraire*, Editions Odile Jacob.
DEFOUAD B. (2000). *Etude de genèses instrumentales liées à l'utilisation de calculatrices symboliques en classe de première S,* Thèse de doctorat, Université Paris VII.
DEHAENE S. (1997). *La bosse des maths*, Editions Odile Jacob.
DEJEAN J. (2002). *L'évaluation de l'enseignement dans les universités françaises*, Haut Conseil de l'évaluation de l'école, MEN.
DELOZANNE E. (1994). Un projet pluridisciplinaire : ELISE, un logiciel pour donner des leçons de méthodes, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.14 (1-2), 211-249.
DRIJVERS P. (2002). Learning mathematics in a computer algebra environment: obstacles are opportunities, in E. Schneider (ed), *Zentralblatt für Didaktik der Mathematik,* vol.34 (5), 221-228.
DUVAL R. (1996). Quel cognitif retenir en didactique? *Recherches en Didactique des Mathématique*s, vol.16 (3), 349-382.
ECO U. (1992). *Comment voyager avec un saumon*, Editions Grasset & Fasquelle (1997).
FAURE C. & GOARIN M. (2001). *Rapport d'enquête sur l'intégration des technologies nouvelles dans l'enseignement des mathématiques en lycée*, IREM, Université Montpellier II.
GUIN D. (1995). A cognitive analysis of geometry proof turned to Intelligent Tutoring Systems, in J.-M. Laborde (ed), *Actes du colloque Modelling student Knowledge: the case of geometry*, Nato ASI Series, vol.117, Springer-Verlag, 82-93.
GUIN D. (ed) (1999). Calculatrices symboliques et géométriques dans l'enseignement des mathématique*s*, *Actes du colloque francophone européen*, IREM, Université Montpellier II.
SCHNEIDER E. La TI-92 dans l'enseignement des mathématiques - des enseignant(e)s découvrent la didactique des mathématiques, 49-60.
GUIN D. & TROUCHE L. Environnements «Calculatrice symbolique»: nécessité d'une socialisation des processus d'instrumentation, évolution des comportements d'élèves au cours de ce processus, 61-78.
LABORDE C. Vers un usage banalisé de Cabri-Géomètre en classe de seconde: analyse des facteurs de l'intégration, 79-94.
TROUCHE L. Regards croisés sur un environnement TI-92, 213-218.
GUIN D. (2001). Intégration des outils de calcul symbolique dans l'enseignement des mathématiques : comment concevoir une formation mieux adaptée ? *Actes de l'Université d'Eté: le métier d'enseignant de mathématiques au tournant du XXI^e siècle*, APMEP 133, 77-93.
GUIN D., DELGOULET J. & SALLES J. (2002). Formation aux TICE: concevoir un dispositif d'enseignement autour d'un fichier rétroprojetable. *Actes du colloque international EM2000*, «*l'enseignement des mathématiques dans les pays francophones*», IREM, Université Grenoble I.
GUIN D., JOAB M. & TROUCHE L. (2003). *Suivi de formation à distance pour les enseignants: bilan de la phase expérimentale (2000-2002),* cédérom, IREM, Université Montpellier II.
GUIN D. & TROUCHE L. (1999). The Complex Process of Converting Tools into Mathematical Instruments. The Case of Calculators. *International Journal of Computers for Mathematical Learning* vol.3 (3), 195-227.
GUIN D. & TROUCHE L. (2001). Analyser l'usage didactique d'un EIAH en mathématiques, une tâche nécessairement complexe, in C. Desmoulins, M. Grandbastien & J.-M. Labat (eds), *Environnements interactifs d'apprentissage avec ordinateur*, *Sciences et Techniques Educatives,* vol.8 (1-2), 61-74.
GUIN D. & TROUCHE L. (eds) (2002). *Calculatrices symboliques, faire d'un outil un instrument du travail mathématique, un problème didactique*, collection blanche (dir. N. Balacheff), Editions La Pensée Sauvage.
TROUCHE L. Les calculatrices dans l'enseignement des mathématiques: une évolution rapide des matériels, des effets différenciés, 21-53.

ELBAZ-VINCENT P. Un système de calcul formel comme assistant de «□instrumentation raisonnée□, 55-88.
LAGRANGE J.-B. Les outils informatiques entre «□sciences mathématiques□ et enseignement. Une difficile transposition□ 89-116
KENDAL M., STACEY K. & PIERCE R. L'influence des environnements de calcul formel sur les modes de travail des enseignants, 117-149.
LAGRANGE J.-B. Etudier les mathématiques avec des calculatrices symboliques. Quelle place pour les techniques□ 151-185.
TROUCHE L. Une approche instrumentale de l'apprentissage des mathématiques dans des environnements de calculatrice symbolique, 187-214.
DRIJVERS P. L'algèbre sur l'écran, le papier et la pensée algébrique, 215-242.
TROUCHE L. Genèses instrumentales, aspects individuels et collectifs, 243-275.
ARTIGUE M. L'intégration de calculatrices symboliques à l'enseignement secondaire□ les leçons de quelques ingénieries didactiques, 277-349.
HOUDÉ O., MAZOYER B. & TZOURIO-MAZOYER N. (eds) (2002). *Cerveau et psychologie*, PUF.
KAHANE J.-P. (2002). *L'enseignement des sciences mathématiques*. Commission de réflexion sur l'enseignement des mathématiques, Centre National de Documentation Pédagogique, Editions Odile Jacob.
KEITEL C. & RUTHVEN K. (eds) (1993). *Learning from computers□ Mathematics Education and Technology*, vol.121, Nato Series FF, Springer Verlag.
HILLEL J. Computer Algebra Systems as cognitive technology□ implication for the practice of mathematics education, 18-47.
DORFLER W. Computer use and views of the mind, 159-186.
DREYFUS T. Didactic design of computer-based learning environments, 231-250.
KUTZLER B. (1994). The Future of Teaching Mathematics, *International Derive Journal*, vol.1 (1), 37-48.
KUZNIAK A. (1994). *Etude des stratégies de formation en mathématiques utilisées par les formateurs de maîtres du premier degré*, Thèse de doctorat, Université Paris VII.
LABORDE C. (1982). *Deux codes en interaction dans l'enseignement mathématique□ langue naturelle et écriture symbolique*, Thèse d'Etat, Université Grenoble I.
LAGRANGE J.-B. (2000). *Document pour l'habilitation à diriger des recherches*, Université Paris VII.
LAGRANGE J.-B. & LENNE D. (eds) (2001). Calcul formel et apprentissage des mathématiques. *Actes des journées d'étude Environnements informatiques de calcul symbolique et apprentissage des mathématiques*, INRP.
TROUCHE L. Description, prescription, à propos de limites de fonctions, 9-26.
DRIJVERS P. Concevoir différents statuts des lettres dans la résolution d'un système avec le calcul formel□ le rôle de l'instrumentation, 61-71.
LAGRANGE J.-B. & PY D. (2002). Développer un environnement d'apprentissage utilisant le calcul formel. Hypothèses, méthode, première réalisation, in J.-F. Nicaud, E. Delozanne & B. Grugeon (eds), *Logiciels pour l'apprentissage de l'algèbre*, *Sciences et Techniques Educatives,* vol.9 (1-2), 91-120.
LAGRANGE J.-B., ARTIGUE M., LABORDE C. & TROUCHE L. (2003). Technology and Mathematics Education□ a Multidimensional Study of the Evolution of Research and Innovation, in A.J. Bishop, M.A. Clements, C. Keitel, J. Kilpatrick & F.K.S. Leung (eds), *Second International Handbook of Mathematics Education*, Kluwer Academic Publishers, 239-271.
LAKOFF G. & NUNEZ R. (2000). *Where Mathematics Comes From : How The Embodied Mind Brings Mathematics Into Being*, New-York, Basic Books.
LAVOIE P. (1994). *Contribution à une histoire des mathématiques scolaires au Québec : l'arithmétique dans les écoles primaires (1800-1920)*, Thèse de doctorat, Faculté des sciences de l'éducation, Université de Laval, Québec.
LE BRETON D. (2002). *Signes d'identité*, Editions Métaillé.
LECOURT D. (1996). *Prométhée, Faust, Frankenstein, Fondements imaginaires de l'éthique*, Editions Synthélabo.
LINARD M. (2001). Concevoir des environnements pour apprendre□ l'activité humaine, cadre organisateur de l'interactivité technique, *Sciences et Techniques Educatives,* 8/2001, IHM, Hermès, 211-238.
LUENGO V. & BALACHEFF N. (1998). Contraintes informatiques et environnements d'apprentissage de la démonstration en géométrie. *Sciences et Techniques Educatives,* vol.5 (1), 15-45.
MARIOTTI M. (2002). The influence of Technological Advances on Students' Mathematics Learning, in L. English, M. G. Bartolini Bussi, G. Jones, R. Lesh, & D. Tirosh (eds), *Handbook of International Research in Mathematics, Education* Lawrence Erbaum Associates, 695-723.
MASCHERONI L. (1798). *Géométrie du compas*, Librairie scientifique et technique Albert Blanchard (1980).
McLUHAN M. (1967). *La Galaxie Gutenberg*, Gallimard.

NOSS R. & HOYLES C. (eds) (1996). *Windows on Mathematical Meanings - Learning Cultures and Computers*, Kluwer Academic Publishers.
PARROCHIA D. (1993). *La philosophie des réseaux*, PUF.
PENGLASE M. & ARNOLD S. (1996). The graphics calculator in mathematics education : a critical review of recent research, *Mathematics Education Research Journal*, vol.8 (1), 58-90.
PITRAT J. (1990). *Métaconnaissance, futur de l'intelligence artificielle*, Hermès.
PROUST C. (2000). La multiplication babylonienne : la part non écrite du calcul, *Revue d'histoire des mathématiques,* vol.6, Société Mathématique de France (SMF), 293-303.
RABARDEL P. (1995). *Les hommes et les technologies, approche cognitive des instruments contemporains*, Armand Colin.
RABARDEL P. & SAMURCAY R. (2001). From Artifact to Instrumented-Mediated Learning, *New challenges to research on learning*, International symposium organized by the Center for Activity Theory and Developmental Work Research, University of Helsinki, March 21-23.
ROBERT A. & ROBINET J. (1996). Pour une prise en compte du méta en didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol.16 (2), 145-176.
RUTHVEN K. (1997). Computer algebra systems (CAS) in avanced-level mathematics, *Report to SCAA*, School of Education, University of Cambridge.
SENSEVY G., MERCIER A. & SCHUBER-LEONI M.L. (2000). Vers un modèle de l'action didactique du professeur. A propos de la course à 20, *Recherches en Didactique des Mathématiques,* vol.20 (3), 263-304.
SFARD A. (2001). Looking at thinking as communicating, *Educational Studies in Mathematics,* vol.46 (1/3), 13-57.
SFEZ L. (2002). *Technique et idéologie (un enjeu de pouvoir)*, Seuil.
SIMONDON G. (1989). *Du mode d'existence des objets techniques*, Aubier.
SOHKNA M. (2002). *Formation à distance et intégration des calculatrices dans l'enseignement des mathématiques*, mémoire de DEA, IREM, Université Montpellier II.
TROUCHE L. (1992). *Calculatrices graphiques, statut pour l'élève, statut pour le maître*, Mémoire de DEA, IREM, Université Montpellier II.
TROUCHE L. (1994). Calculatrices graphiques, la grande illusion*, Repères-IREM* vol.14, 39-55.
TROUCHE L. (1995). E pur si muove, *Repères-IREM*, vol.20, 16-28.
TROUCHE L. (1996). *Enseigner en terminale S avec des calculatrices formelles,* IREM, Université Montpellier II.
TROUCHE L. & GUIN D. (1996). Seeing is Reality : How Graphic Calculators May Influence the Conceptualization of Limits, in L. Puig & A. Gutiérrez (eds), *Proceedings of the PME 20*, Universitat de Valencia, vol.4, 323-330.
TROUCHE L. (1997). *A propos de l'enseignement des limites de fonctions dans un «□nvironnement calculatrice□, étude des rapports entre processus de conceptualisation et processus d'instrumentation*. Thèse de doctorat, IREM, Université Montpellier II.
TROUCHE L. (2000a). New technological environments: new constraints, new opportunities for the teacher, *The International Journal of Computer Algebra in Mathematics Education*, vol.7 (3), 165-180.
TROUCHE L. (2000b). La parabole du gaucher et de la casserole à bec verseur, éléments de méthode pour une étude des processus d'apprentissage dans un environnement de calculatrices complexes, *Educational Studies in Mathematics,* vol.41, 239-264.
VAN den HEUVEL-PANHUIZEN M. (ed) (2001). *Proceedings of the 25th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Utrecht, Freudenthal Institute.
HERSHKOWITZ R. & KIERAN C. Algorithmic and Meaningful Ways of Joining Together Representatives within Same Mathematical Activity : an Experience with Graphing Calculators, vol.1, 96-107.
LAGRANGE J.-B., ARTIGUE M., LABORDE C. & TROUCHE L. A Meta Study on IC Technologies in Education□Towards a Multidimensional Framework to Tackle their Integration, vol.1, 111-122.
VASQUEZ BRONFMAN S. (2000). Le practicum réflexif : un cadre pour l'apprentissage de savoir-faire. Le cas du campus virtuel des nouvelles technologies éducatives, *Sciences et techniques éducatives,* 7(1), 227-243.
VERGNAUD G. (1990). La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématique*s, vol.10 (2-3), 133-170.
VERGNAUD G. (2002). Piaget visité par la didactique, in *Piaget et les Sciences Cognitives*, *Intellectica* 2001/2 n°33, 107-123.
VIVET M. (1991). Usage des tuteurs intelligents□prise en compte du contexte, rôle du maître, in M. Baron, R. Gras & J.-F. Nicaud, (eds), *Deuxièmes journées EIAO de Cachan*, Editions de l'ENS de Cachan, 239-246.
VOM HOFE A. (ed) (2000). Interactions homme-système, perspectives et recherches psycho-ergonomiques, *Revue d'intelligence artificielle*, vol.14 (1-2).
BEGUIN P. & RABARDEL P. Concevoir pour les activités instrumentées, 35-54.

HOC J.-M. La relation homme-machine en situation dynamique, 55-71.
VYGOTSKI L.S. (1934). *Pensée et langage*, Editions sociales (1985).
WARTOFSKY M. (1983). From genetic epistemology to historical epistemology Kant, Marx and Piaget, in Liben L.S. (ed) *Piaget and the foundations of knowledges*. Hillsdale, N.J., Lawrence Erlbaum.
WEIGAND H.-G. & WELLER H. (2001). Changes of Working Styles in a Computer Algebra Environment – The Case of Functions, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol.6, 87-111.
YERUSHALMY M. (1997). Reaching the unreachable technology and the semantics of asymptotes, *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, vol.2, 1-25.

LE MOBILE



Il y a de nombreuses années, je disais à mes étudiants : « prenez une feuille de papier et dessinez-moi un monde social ».
Presque tous faisaient *une pyramide*.
De plus en plus, pour remplacer une image par une autre, je vois le monde social comme *un mobile de Calder*, où il y aurait *des espèces de petits univers qui se baladent les uns par rapport aux autres* dans *un espace à plusieurs dimensions* (Bourdieu)