Analyse didactique de protocoles obtenus dans un EIAH en algèbre

Denis Bouhineau, Alain Bronner, Hamid Chaachoua, Thomas Huguet

Analyse didactique de protocoles obtenus dans un EIAH en algèbre

Denis Bouhineau*, Alain Bronner, Hamid Chaachoua*, Thomas Huguet***

** LEIBNIZ-IMAG*
46 Av F. Viallet
38031 Grenoble Cedex
prénom.nom@imag.fr

*** ERES, LIRDEF, IUFM de Montpellier*
2 Place Godechot,
BP 4152, 34092 Montpellier Cedex
alain.bronner@montpellier.iufm.fr

Le micromonde APLUSIX permet de garder des traces très fines de l'activité des élèves qui l'utilisent. En effet, il enregistre, dans leur totalité, aussi bien les événements du clavier, que les actions de la souris. Il est ensuite possible de suivre à l'aide d'un "magnétoscope" les évolutions des élèves.

Nous avons conduit des expérimentations destinées à établir un état des lieux des connaissances des élèves en algèbre en début d'année scolaire, dans des classes de troisième, seconde et première. Elles ont eu lieu en septembre 2002 et nous ont apporté des données expérimentales riches et abondantes. Les exercices proposés aux élèves couvraient l'essentiel des programmes des classes concernées. Les protocoles, que nous avons obtenus, nous apportent des informations essentielles aussi bien sur les démarches des élèves, que sur les caractéristiques d'APLUSIX, en tant qu'EIAH.

Dans cet article, après la description de l'EIAH utilisé et de l'expérimentation, nous analysons les comportements d'élèves sur des problèmes de résolutions d'équations puis nous étudions la prise en main, par les élèves, des fonctionnalités de vérification de raisonnement qu'intègre APLUSIX et que les élèves sont amenés à utiliser.

MOTS-CLÉS : EIAH, algèbre, équation, vérification, équivalence, rétroaction

1. Introduction

D'un point de vue socio-constructiviste, une connaissance nouvelle n'est pas le résultat d'une juxtaposition de connaissances antérieures bien organisées en étapes successives. C'est le résultat d'une construction faite par l'apprenant en interaction avec un milieu organisé par l'enseignant. Ces connaissances, si elles sont inadaptées à un problème à résoudre, vont produire des erreurs, des dysfonctionnements ou des obstacles à de futurs apprentissages.

Comment accéder à ces connaissances préalables ? Comment interpréter ces erreurs ? Comment accéder aux connaissances qui sont à l'origine de ces erreurs ? Comment faire évoluer ces connaissances ?

Nous proposons dans cet article de montrer comment un EIAH permet d'apporter des réponses à ce type de questions et de construire une modélisation de l'apprenant. Pour cela, nous avons mis en place au cours des mois de septembre et octobre 2002 une expérimentation dans plusieurs classes de différents niveaux. Cette expérimentation s'inscrit dans le cadre d'un projet[1] s'appuyant sur l'utilisation du logiciel APLUSIX. Ce logiciel est un micro-monde pour faire du calcul algébrique. De plus, il permet d'enregistrer tout le travail de l'élève ce qui constitue une base de données pour l'analyse. L'objectif général est de déterminer des conceptions d'élèves particuliers en algèbre, afin de définir des conceptions prototypiques et de concevoir des stratégies pour corriger les dysfonctionnements. Les travaux présentés dans cet article concernent l'analyse clinique à la main, la recherche des règles et des stratégies des élèves dans la réalisation de tâches algébriques.

L'application est présentée en section 2, la section 3 explicite la méthode d'expérimentation. Nous avons choisi le type de problèmes qui concerne les "Equations" pour illustrer nos travaux didactiques. Dans la section 4, nous présentons une analyse des stratégies des élèves de la classe de 1°S à propos des équations. Ensuite, dans la section 5 nous nous intéressons aux processus de vérification en classe de 2de.

2. Présentation de l'application

L'application utilisée par les élèves au cours des expériences du dernier trimestre de l'année 2002 (EXP92) est une version limitée de l'éditeur APLUSIX. décrit dans [Bouhineau et al. 2002] (visiter http://aplusix.imag.fr pour suivre le développement

---

[1] Projet, intitulé « Modélisation cognitive de comportements d'élèves en algèbre », financé par le ministère de la recherche. Participent à ce projet des chercheurs, en informatique, didactique et psychologie, du Leibniz-IMAG, de l'IUFM de Montpellier et de l'université de Paris 8.

du micromonde APLUSIX). Elle permet seulement un travail sur une série d'exercices prédéfinis, avec des paramètres fixés.

2.1. *Environnement de travail de l'élève*

2.1.1. Edition d'expressions

Les principes à la base de la réalisation de l'éditeur d'expressions privilégient la saisie et la modification d'expressions algébriques sous une forme aisée en respectant la structure mathématique. Les expressions algébriques considérées sont les expressions mathématiques simples (avec les chiffres, les symboles x, y, z, les 4 opérateurs +, -, *, et /, l'élévation à la puissance, la racine carrée et les deux pseudo-opérateurs parenthèses), associées avec les opérateurs relationnels (=, ≠, <, ≤ et ≥) et si nécessaire avec les opérateurs booléens (le « et », représenté sous forme d'accolade, et « ou »). Le domaine de validité des expressions saisies est limité aux polynômes, et fractions rationnelles, aux équations et inéquations polynomiales à une inconnue de degré 4 au plus, et aux systèmes d'équations linéaires.

La saisie est en 2d. Lors de sélection et d'insertions d'expressions, les expressions introduites dans le presse-papiers ou produites sont des expressions bien formées mathématiquement. En cours de saisie ou de modification d'une expression, un symbole « ? » est ajouté, lorsque cela est nécessaire pour que, localement, l'expression soit toujours bien formée. Le statut des expressions est donné par la couleur de la fonte utilisée à l'affichage. Les expressions valides sont en noir. Les expressions incomplètes, hors domaine ou mal typées sont dessinées en bleu. Les expressions indéfinies apparaissent en rouge.

L'élève peut utiliser le clavier (physique) de son ordinateur, ainsi qu'un clavier virtuel, voir figure 1, et les menus de l'application. Les commandes et microactions essentielles sont disponibles dans ces trois espaces.

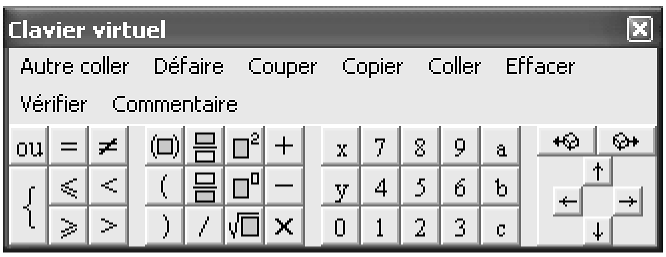


Figure 1. Clavier virtuel

2.1.2. Edition du raisonnement et passage d'un exercice au suivant

Chaque exercice commence pour l'élève par un énoncé non modifiable qui constitue la première étape d'un raisonnement que l'élève produit en utilisant deux commandes possibles. La première commande « dupliquer étape » duplique l'étape courante pour produire une étape semblable à l'étape d'origine que l'élève peut modifier et qui se trouve attachée à l'étape d'origine (son étape mère) par un lien. La seconde commande « nouvelle étape » introduit une nouvelle étape attachée à l'étape d'origine avec un lien du même type contenant l'expression vide « ? ».

D'une même étape, un élève peut appliquer plusieurs fois l'une des deux commandes précédentes créant ainsi plusieurs filles de l'étape mère, le raisonnement prend alors la forme d'un arbre. En général, les raisonnements se déroulent linéairement. Dans tous les cas, seules les étapes en bout de branche sont modifiables par l'élève. Les différents liens possibles entre les étapes dépendent du type des expressions contenues à chaque étape et d'un paramètre précisant si l'éditeur doit vérifier ou non la justesse des calculs. Dans le cas où le logiciel ne vérifie pas la justesse des calculs (i.e. l'équivalence entre deux étapes selon la sémantique définie dans [Nicaud et al. 2001]), un trait simple noir relie deux étapes mère et fille. Dans le cas contraire, si les étapes comportent des polynômes, les liens sont deux traits noirs parallèles et verticaux (un « = » vertical), si les étapes comportent des équations, inéquations, ou des systèmes d'équations, ces traits commencent et se terminent avec une flèche (un « ⇔ » vertical). Dans ces deux derniers cas, ce liens est dessiné en bleu ou rouge et est alors surmonté d'une croix quand l'équivalence entre l'étape mère et l'étape fille n'est plus respectée, soit parce que l'étape fille est incomplète (couleur bleue) soit que l'équivalence n'est pas obtenue (couleur rouge).

Quand l'élève considère avoir terminé un exercice, il le signifie au logiciel (appel d'un menu spécifique) qui gèle son raisonnement.

2.2. Côté professeur

Pour les chercheurs travaillant sur les comportements des élèves, une analyse globale et statistique des protocoles était fournie ; l'essentiel de l'analyse a reposé, cependant, sur une lecture détaillée des protocoles obtenus avec le magnétoscope d'APLUSIX. Ces protocoles comportent, entre autres, les microactions réalisées par l'élève (click de souris, frappe de clavier), l'ensemble des paramètres de la session, et les expressions obtenues. Enregistrés sous format texte ils peuvent être consultés directement, avec un tableur ou avec le magnétoscope. Ce dernier comporte des fonctionnalités standards et donne à chaque instant quelques informations supplémentaires : quel est le temps de réflexion avant la prochaine microaction, quelle sera la prochaine microaction, quels ont été les messages d'erreurs générés.

3. Méthode

L'expérimentation EXP92 a comporté trois séries d'exercices de niveaux similaires (une trentaine d'exercices par série, comportant des polynômes à développer, réduire, factoriser, des équations, inéquations et systèmes d'équations à résoudre, avec quelques exercices communs entre séries et niveaux). Elle s'est déroulée sur un mois en classe de troisième (5 classes), de seconde (4 classes) et de première (2 classes) et durait environ 1 heure pour chacune des 3 situations. Les enseignants participant à l'expérimentation avaient pour consignes de ne pas apporter d'aide mathématique aux élèves. Ces derniers avaient à disposition, si nécessaire, calculatrice, papier et crayon. Ces enseignants n'appartiennent pas aux groupes de recherche APLUSIX.

4. Analyse des stratégies des élèves de 1ère S à propos des équations

Dans chaque situation, la tâche de l'élève se présente sous la forme d'un problème d'algèbre comportant une expression algébrique, une équation, inéquation ou système d'équations et une consigne en langage naturel (figure 2)

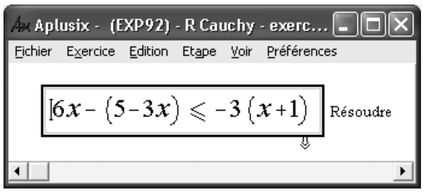


Figure 2. Exemple de tâche

Il s'agit de problèmes se situant complètement dans le cadre algébrique [Douady 1984] et dans le registre des écritures algébriques [Duval 1993]. A ce niveau de classe, la très grande majorité des élèves se représente les tâches à réaliser. Certaines correspondent à des tâches routinières, d'autres le sont moins mais ont été choisies de manière à rester dans une zone proximale raisonnable. Aussi, nous nous centrons directement sur l'étude de leurs stratégies. Les trois situations de l'expérimentation apparaissent comme des moments adidactiques d'action [Brousseau 1986] avec des caractéristiques différentes selon les trois situations. Dans chacune, d'un point de vue de l'activité cognitive, les élèves doivent mobiliser leurs connaissances du cadre algébrique sous les contrats liés aux consignes et travaillés dans les classes précédentes, et transformer les expressions dans le registre des écritures algébriques sous les contraintes de l'ergonomie de l'EIAH.

Dans la première situation, le milieu est assez pauvre, sans rétroaction de l'EIAH, l'élève utilisant le système pour produire une bonne présentation de ses calculs.
Dans la deuxième situation, l'élève peut demander la vérification des calculs à l'EIAH quand il le souhaite (Figure 3).
Dans la troisième situation, le milieu [Brousseau 1990] offre en permanence des rétroactions sous forme d'une égalité ou d'une non égalité d'expressions, ou encore, dans le cas des équations, d'une équivalence ou d'une non-équivalence.

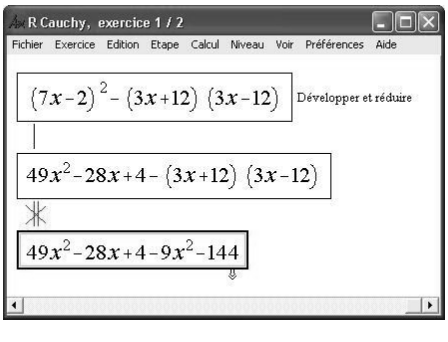


Figure 3. Effet d'une vérification

Nous montrerons dans la suite quelques cas où ces rétroactions pousseront les élèves à modifier leurs expressions, voire leurs procédures ou leurs stratégies.

L’analyse des résultats des deux classes de 1[ère] S fait apparaître quelques exercices dont le taux de réussite est très faible. Ces résultats nous ont conduits à regarder de plus près les protocoles APLUSIX de quelques élèves.

4.1. Les équations produits (a x+b)(c x+d)=0

Des élèves restent bloqués sur la résolution des équations produits (AB = 0, avec A et B du premier degré) alors que l’apprentissage de ce type d’équations a commencé en fin de collège. Par exemple, les réussites à la première situation sur l’équation (3x+5)(-x+9)=0 sont respectivement de 58% et 53% sur les deux classes. Pour l’équation (-3x+9)(2x+4)-(-3x+9)(7x-1)=0, le taux passent respectivement à 41% et 33%. Si 23 élèves produisent la solution x = $-\frac{5}{3}$ ou x = 9 pour l’équation (3x+5)(-x+9) = 0, une vingtaine d’élèves développe les expressions pour obtenir une forme réduite $ax^2 + bx + c = 0$.

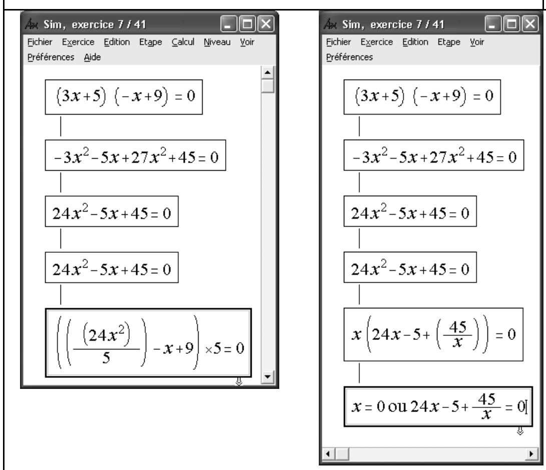
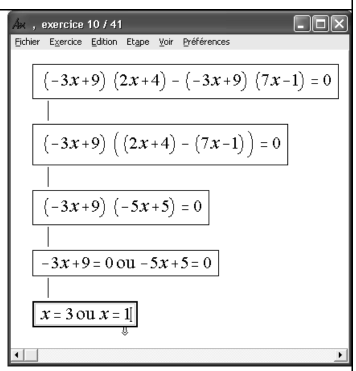
Situation 1	Situation 2
	

Figure 4. Extrait de protocole APLUSIX de l’élève Sim.

Par exemple, l’élève Sim (figure 4) arrive à résoudre les exercices de la situation 1, mais après être passé par diverses étapes, sans qu’une stratégie bien claire apparaisse au début du test. Au cours de la deuxième situation, il semble que l’élève ait intégré dans sa stratégie l’idée de factoriser, peut-être grâce à l’interaction avec l’EIAH.

Quelques élèves ont dû être surpris par la « présentation » particulière de la réponse qui doit présenter systématiquement un « ou » à chaque étape et imposé par l’EIAH pour obtenir l ‘équivalence. Cela ne correspondait peut-être pas au contrat didactique de leur classe [Brousseau 1990]. Cependant le taux de réussite assez faible en classe de 1ère S sur ce type d'exercices et l'observation de protocoles individuels montrent que la résolution des équations produits n'est pas encore stabilisée en début d'année de 1ère S pour un nombre relativement important d'élèves.

4.2. Les équations a x^2 = b

Ce type d'exercices a posé beaucoup de difficultés à de nombreux élèves de Première S (la réussite est de 8% et 25%). Pour l'équation $4x^2=81$, sur les 46 élèves de première S seuls 14 produisent la solution $x = \frac{9}{2}$ ou $-\frac{9}{2}$ (à la formulation près) et 17 la solution $\frac{9}{2}$. Une douzaine passe clairement par l'étape $4x^2 - 81= 0$ ou $(2x-9)(2x+9) =0$. Des erreurs dans la factorisation apparaissent. 5 élèves écrivent par exemple $(4x-9)(4x+9) =0$.

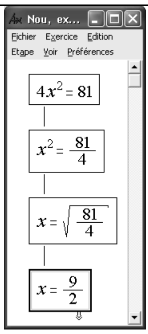
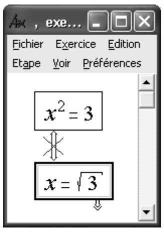
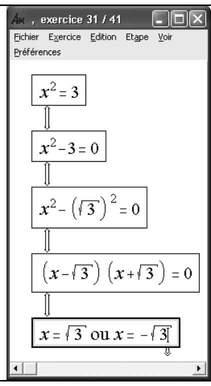
Situation 1	Situation 3	
		

Figure 5. Extrait de protocole de l'élève Nou

Suivons les stratégies d'un élève, Nou (Première S), prototypique de certaines difficultés et fonctionnements sur ces exercices. Cet élève commence à résoudre la première équation $4x^2 = 81$, en se ramenant à $x^2 = a$, puis il semble appliquer un théorème en acte [Vergnaud 1991] « $x^2 = a$ implique $x = \sqrt{a}$ ». Nous situons cet élève dans une conception de type procédural [Sfard et al. 1994]. Une vingtaine d'élèves de première S s'inscrit dans cette démarche. Cette conception est très résistante. En effet, l'élève Nou ne changera de procédure qu'à la situation 2, semble-t-il en réaction à la vérification demandée par lui-même ou à l'indication de non équivalence s'affichant sur la fenêtre à la situation 3 (figure 5).

Une autre élève Zen montre un cheminement différent à travers les trois situations. A la première, cette élève commence à résoudre l'équation $4x^2 = 81$ en appliquant une technique générale de la classe de Seconde pour se ramener au produit nul ; cela la conduit à fournir comme dernière étape « $\frac{9}{2}$ ou $-\frac{9}{2}$ ». A la situation 2 pour l'équation $x^2 = 3$, l'élève Zen change de procédure et se lance dans des techniques de type procédural en essayant plusieurs possibilités après avoir demandé la vérification d'APLUSIX (figure 6). Ce n'est qu'à la quatrième tentative que Zen va conclure par une procédure en rupture avec celle repérée pour l'équation $4x^2 = 81$.On note une grande labilité des stratégies et techniques chez Zen, ce qui est un indice d'un élève pseudo-structural [Sfard et al. 1994].

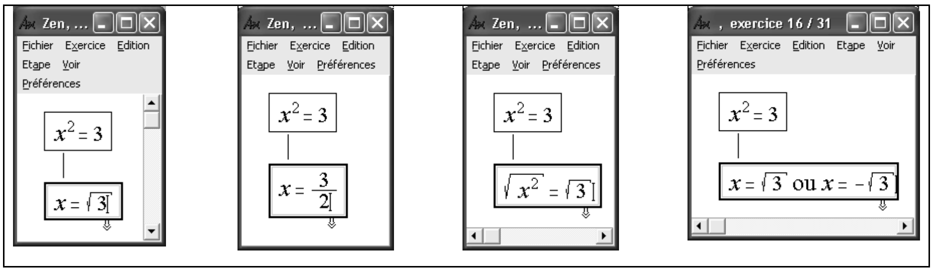


Figure 6. Extraits du protocole de l'élève 5 (situation 2)

L'analyse des protocoles à propos de ce type d'équation $ax^2 = b$ confirme bien que les coefficients a et b sont des variables didactiques [Brousseau 1981] pesant sur les procédures des élèves.

4.3. Les équations non routinières

Nous désignons par « équations non routinières » les équations dont la résolution n'a pas fait l'objet d'un enseignement. Dans le cadre de l'expérimentation, elles nous apportent donc des informations sur les compétences heuristiques des élèves.

4.3.1. Les équations se ramenant au premier degré

Seuls 16 élèves produisent la réponse x = 3 pour l'équation $(x-3)(x+7)=x^2-4x+3$. Si certains élèves « voient » que cette équation se ramène au premier degré, d'autres n'arrivent pas à anticiper. Ils restent enfermés dans une stratégie de factorisation des équations du second degré. Des élèves n'arriveront à résoudre cette équation qu'à la troisième situation sous le mode de vérification permanente.

Pour l'équation $\frac{2x-2}{5x-3}=1$, 25 élèves trouvent la réponse x $=\frac{1}{3}$ à la situation 1. Examinons les différentes stratégies des élèves : Cinq élèves se ramènent à $\frac{A'}{B'}=$ 0 par une règle de transposition appliquée au nombre 1, puis arrivent à conclure en produisant l'étape A' = 0.

Une dizaine d'élèves environ trouve une stratégie efficace et rapide pour se raccrocher à une technique connue comme l'élève Sim (figure 7). Il interprète ici le contenu de l'expression du premier membre comme un quotient égal à 1. Ce qui l'a conduit à égaler numérateur et dénominateur.

Une dizaine d'élèves écrit l'égalité de deux fractions : $\frac{2x-2}{5x-3}=\frac{5x-3}{5x-3}$ et poursuit en considérant l'égalité des deux numérateurs.

Quelques élèves produiront l'erreur A = 1 ou B = 1, généralisant en quelque sorte la règle du produit nul.

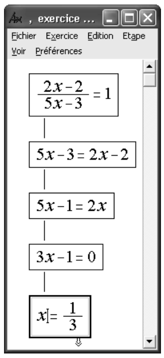


Figure 7.

Suivons la résolution de l'élève Zen au cours de la situation 2. Après une bonne activation du schème de transformation pour se ramener à la forme A = 0 l'élève Zen étend la règle du produit nul au quotient (figure 8). Dans une stratégie, vraisemblablement, d'élimination du dénominateur et en relation avec les rétroactions de l'EIAH, l'élève essaie des transformations fractionnaires, laissant surgir alors des formes indéfinies (figure 9). Zen modifie encore l'équation pour se ramener à quelque chose de plus solide pour elle et produit une équivalence avec une expression fractionnaire de dénominateur 1. Quatre élèves suivront la stratégie de Zen (figure 10) dans la troisième situation en prenant un dénominateur 1.

Mais l'équivalence, validée par APLUSIX, est-elle perçue par Zen ? Notre élève aurait-elle évolué vers une conception plus structurale [Sfard et al. 1994] ?

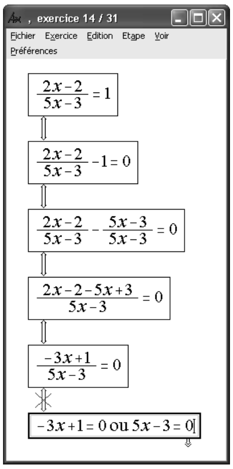


Figure 8.

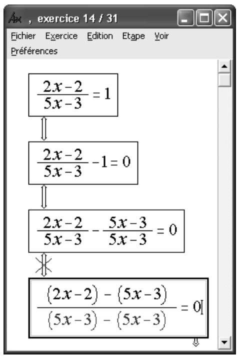


Figure 9.

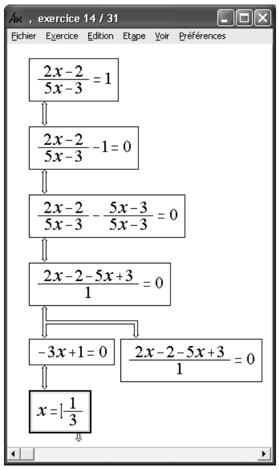


Figure 10.

L'analyse globale de son protocole nous fait pencher pour la négative. Notre position est aussi appuyée par le fait que cette élève dans son changement respecte tout d'abord la forme fraction en laissant un dénominateur 1. On peut se demander si ce n'est pas son pseudo structuralisme, qui se traduit par les diverses transformations correctes ou erronées du premier membre, qui lui aurait permis de tomber sur une équivalence, validée par APLUSIX. Il est notable que cette élève produise à chaque situation cette procédure grâce aux interactions avec l'EIAH ; on peut penser qu'elle a appris une technique de résolution, particulièrement singulière mais localement stable, des équations $\frac{A}{B} = 1$.

4.3.2. Equations complexes du type $\frac{A}{B} = 0$

Le taux de réussite de l'équation $\frac{(2x+4)(5-3x)}{4x(x+1)} = 0$ est d'environ 50%. Une douzaine d'élèves fournit la réponse juste en passant par l'étape (2x+4)(5-3x) = 0.

Quand l'expression se complexifie encore, les élèves peuvent être complètement déstabilisés, jusqu'à ne plus voir que le numérateur était déjà factorisé ou sans avoir de stratégie véritable en début de résolution. Plusieurs élèves restent bloqués sur cette équation en développant et réduisant le numérateur et le dénominateur, alors qu'ils ont par ailleurs réussi les équations produits élémentaires (figure 11 et 12).

Ils ne pourront annuler le numérateur qu'après ce développement, et non sous la forme factorisée. Certains élèves essayent tout d'abord une procédure s'appuyant sur ce qui semble être une extension de la règle du produit nul (figure 11). La non équivalence indiquée par APLUSIX va parfois les conduire à changer de stratégie.

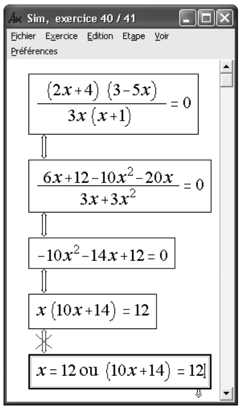


Figure 11.

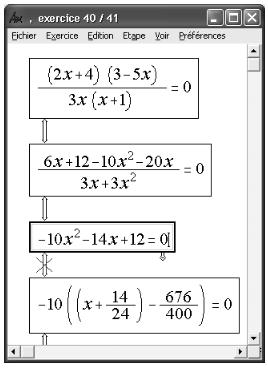


Figure 12.

Ces protocoles à propos des types d'équations étudiées montrent bien le manque de stratégies de la part de certains élèves, se lançant dans des transformations sans véritablement anticiper les formes obtenues. Toutes ces équations non routinières restent encore très problématiques pour des élèves de 1ère S.

5. Analyse du processus de vérification en classe de 2de

Comme nous l'avons dit plus haut, une des différences entre les trois situations est le paramètre de vérification. Nous analysons la manière dont les élèves font appel à la fonctionnalité de vérification dans la situation 2 en référence aux travaux de [Margolinas 1993]. Au cours de cette situation, la vérification est à la demande de l'élève. Le recours à la vérification peut être ou non systématique. Le rapport du nombre de vérifications au nombre d'étapes varie de 0,3 à 2. Les résultats permettent de dégager plusieurs comportements :

- Le recours à la vérification se fait à la dernière étape. Pour ces élèves, il s'agit plutôt d'un moment de validation de la résolution. Nous avons remarqué que souvent la validité de la résolution dépend uniquement de la validité de l'équivalence de la dernière étape quelle que soit la validité des étapes précédentes. Ceci soulève la question du sens que donne l'élève au statut de l'équivalence dans APLUSIX.

- Le recours à la vérification est moins systématique. Il intervient à des moments de la résolution. Dans ce cas la vérification est considérée comme un moyen de contrôle d'étapes décisives ou dont l'élève n'est pas sûr.

- La vérification se fait à chaque étape de la résolution. L'élève cherche à valider chaque étape. Il se met sous contrôle complet de l'EIAH en quelque sorte. Ce profil est largement majoritaire par rapport aux deux autres.

6. Conclusion

Nous avons donné quelques résultats statistiques, obtenus à partir de l'EIAH, qui donnent les grandes tendances au niveau des réussites et des procédures des élèves. Mais nous avons surtout commencé à étudier en quoi les protocoles APLUSIX nous permettent de mieux rendre compte de l'activité de l'élève dans des tâches purement algébriques et de construire des modèles des élèves algébristes. Ainsi, avec l'étude des protocoles informatiques obtenus par l'application APLUSIX nous sommes rentrés au cœur du fonctionnement des élèves.

Comparées aux analyses que l'on peut faire avec des copies d'élèves, celles faites avec l'EIAH offrent de nombreux avantages. Avec APLUSIX et son module « magnétoscope », nous pouvons rejouer la résolution d'un élève, apprécier le temps passé sur chaque action, suivre pas à pas ses tentatives et essais spontanés, avoir connaissance de ce qu'il efface et enfin de ce qu'il livre comme réponse finale. En quelque sorte, non seulement les ratures de sa « copie » sont visibles, mais même ce qu'il a effacé nous est alors accessible. Nous avons ainsi tenté d'identifier des stratégies et de repérer les règles de transformation correctes ou erronées. Nous avons pu déceler des indices de conceptions au sens de [Sfard et al, 1994]. Les élèves pseudo-structuraux, caractérisés par leur labilité dans les stratégies et l'utilisation de règles, peuvent plus facilement être repérés à l'aide de l'EIAH. Notre travail va se centrer sur la construction de modèles utilisables au niveau de la recherche ou de l'enseignement. Nous chercherons, en partie à la main, en partie par programme, les règles correctes et erronées des élèves avec leurs fréquences d'emploi.

Nous avons pu étudier aussi l'évolution, sur les trois situations, de certaines connaissances chez des élèves comme Zen et Nou à propos des équations $ax^2=b$ (voir la partie 4.2. et 4.3.2.) et l'influence du type de validation proposé à l'élève.

Les différents types de rétroactions proposées par APLUSIX ont fait changer les élèves de procédures et ont permis de déstabiliser un peu des conceptions de type procédural ou pseudo-structural. Là aussi, un axe de nos travaux ultérieurs sera d'étudier plus précisément les processus d'instrumentation [Rabardel 1995] concernant l'évolution des connaissances relatives à certains types de tâches algébriques. L'EIAH laisse entrevoir des potentialités intéressantes pour la construction de situations adidactiques [Brousseau 1986] favorisant l'évolution des connaissances algébriques des élèves. Il nous restera à étudier ces conditions d'apprentissage.

Enfin, nous avons commencé à étudier le processus d'instrumentalisation [Rabardel 1995] en nous centrant sur l'utilisation de la vérification et en caractérisant plusieurs types de comportement où intervient cette action.

7. Bibliographie

[Bouhineau et al. 2002] Bouhineau, D., Huguet, T., Nicaud, J.F., « Doing mathematics with the APLUSIX-Editor », *Actes de Visit'me 2002, ACDCA'7*, J Böhm (ed.), Vienne, Autriche, ISBN 3-901769-49-8, Juil. 2002.

[Brousseau 1981] Brousseau, G. « Problèmes de didactique des décimaux », *RDM Vol 2.1*, La Pensée Sauvage, Grenoble, 1981.

[Brousseau 1986] Brousseau, G., « Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques », *RDM Vol. 7/2*, La pensée sauvage, Grenoble, 1986.

[Brousseau 1990] Brousseau, G., « Le contrat didactique : le milieu », *RDM Vol. 9/3*, La pensée sauvage, Grenoble, 1990.

[Douady 1984] Douady, R., « Jeux de cadres et Dialectique outil-objet », *Thèse d'état*, Université Paris VII, 1984.

[Duval 1993] Duval, R., « Registres de représentation sémiotique et fonctionnement cognitif de la pensée, Annales de didactiques et de sciences cognitives », Vol. 5, ULP, IREM de Strasbourg, 1993.

[Nicaud et al. 2001] Nicaud, J.F., Bouhineau, D., Gélis, J.M. « Syntax and Semantics in Algebra , *Proceedings 12th ICMI: The Future of the Teaching and the Learning of Algebra.* p. 475-486. University of Melbourne. ISBN 0-9579673-0-6, Dec 2001.

[Margolinas 1993]. Margolinas, C. (1993), « De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques » (1993). La pensée Sauvage, Grenoble,1993.

[Sfard et al. 1994] Sfard, A. et Linchevski, L., « The gains and the pitfalls of réification – The cas of algebra », *Educational Studies in Mathematics, Vo.l 26*, 1994

[Rabardel 1995] Rabardel, P., « Les hommes et les technologies », Armand Colin, 1995

[Vergnaud 1991] Vergnaud, G., « La théorie des champs conceptuels », *Vol 10/2.3*, La pensée sauvage,Grenoble, 1991