Détermination automatique des théorèmes-en-acte des élèves en algèbre. Le cas des équations et inéquations de degré 1

Hamid Chaachoua*, Jean-François Nicaud, Marilena Bittar*****

** IUFM-LEIBNIZ-MeTAH*
46 Av F. Viallet
38031 Grenoble Cedex
Hamid.Chaachoua@imag.fr
***Université Joseph Fourier- LEIBNIZ- MeTAH*
46 Av F. Viallet
38031 Grenoble Cedex
Jean-Francois.Nicaud@imag.fr
**** UFMS-Université de Campo Grande*
Brasil,
marilena@dmt.ufms.br

RÉSUMÉ. *Dans cet article, nous sommes intéressés à la détermination automatique de théorèmes-en-acte en algèbre. Ces théorèmes-en-acte ont été construits de façon abstraite, puis nous avons cherché à automatiser le mécanisme de leur diagnostic. Pour cela, nous avons utilisé le logiciel Aplusix comme support des productions des élèves qui permet d'enregistrer toutes les actions des élèves. Une base de règles correctes et erronées a été mise en place et un interpréteur de règles a été réalisé. Ils permettent de faire un diagnostic local des transformations des élèves. C'est à partir de ces diagnostics que nous avons déterminé les théorèmes-en-acte des élèves. Nous nous sommes appuyés sur les données des expérimentations que nous avions conduites, en France, avec des élèves de 14-15 ans, et au Brésil, avec des élèves de 13-14 ans.*

MOTS-CLÉS : *théorème-en-acte, diagnostic, algèbre, contexte, didactique.*

1. Introduction

La modélisation des connaissances de l'élève est depuis longtemps une composante majeure des travaux de la communauté AI-ED [WENGER 1987, DILLENBOURG & SELF 1992]. Elle a aussi pris une place centrale dans différentes théories de didactiques~~s~~, d'abord comme cadre de recherche [VERGNAUD 1991, BALACHEFF 1995], et ensuite comme outil pour décrire l'état des connaissances des élèves à propos d'un concept [ARTIGUE & ROBINET 1982] ou pour prendre des décisions didactiques dans les situations d'apprentissages [TAHRI 1993, CHAACHOUA & LIMA 2003].

Pour modéliser les connaissances de l'apprenant nous nous sommes référés à la théorie du champs conceptuel de Vergnaud (1991). Le point de départ de cette théorie est que les conduites des élèves (hésitations, erreurs, décisions…) dans des situations de résolution de problèmes sont structurées par des schèmes. L'auteur définit le « schème » par *l'organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée*. C'est dans les schèmes qu'il faut rechercher les connaissances-en-acte du sujet, c'est-à-dire les éléments cognitifs qui permettent à l'action du sujet d'être opératoire (ibid, p.136). Un schème repose sur :
- un ensemble d'invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte),
- des anticipations du but à atteindre,
- des règles d'actions qui permettent de générer les actions du sujet,
- des inférences ou des raisonnements qui permettent de calculer les règles d'actions, et donc de mettre en œuvre le schème dans chaque situation particulière.

Un thèorème-en-acte est un invariant de type proposition, il est tenu être vrai ou faux. « Les concepts se développent dans l'action et sous tendent les formes d'organisation de l'activité que sont les schèmes. Il n'y a pas d'action possible sans propositions tenues pour vraies sur le réel. Ce sont justement ces propositions tenues pour vraies que j'appelle théorèmes-en-acte, y compris pour d'autres domaines d'activité que les mathématiques. Leur portée est souvent locale (elle l'est toujours dans la phase d'émergence) ; ils peuvent rester implicites ; ils peuvent même être faux » (VERGNAUD 2001).

Par exemple[1], un schème de résolution des équations de degré 1 de la forme ax+b=c repose sur des théorèmes-en-acte comme *on conserve l'égalité en sous-trayant b des deux côtés* et des règles d'actions comme *si a+b=c alors a+b-b=c-b*.

Dans cette recherche, nous proposons de déterminer les règles d'actions et les théorèmes-en-actes relatifs au concept que nous appelons *mouvement dans les équations*.

Depuis janvier 2003, nous avons engagé un travail de modélisation de comportements des élèves en algèbre, dans le cadre d'un projet financé par le

[1] Tiré de (Vergnaud, 1991, p. 137)

ministère de la recherche[2]. Nous présentons, dans cet article, le modèle et les mécanismes que nous avons développés pour les équations et inéquations de degré 1, ainsi que leur application sur des productions d'élèves faites avec Aplusix en France et au Brésil.

Au début de ce travail, nous avons construit *a priori* des théorèmes-en-actes possibles d'élèves sur un concept, en associant des comportements possibles de l'élève, relatifs au concept, aux différents contextes dans lesquels ces comportements se produisent. Ensuite, nous avons mis en œuvre ce modèle de façon automatique pour voir s'il produisait une discrimination significative entre les élèves.

2. Une modélisation par des règles de réécriture

2.1. Principes généraux

Une très grande partie des calculs d'algèbre formelle s'effectuent en appliquant des règles de réécriture, selon le principe du remplacement d'égaux [DERSHOWITZ et JOUANNAUD 1989]. Une règle de réécriture R est un objet de la forme A → B. Elle est applicable à une expression E si A s'unifie à une sous-expression U de E. L'application consiste à remplacer U dans E par B. Lorsque l'on utilise un résolveur de référence, les règles sont issues d'identités fournies par des axiomes ou des théorèmes. Ainsi, l'identité A(B+C)=AB+AC produit-elle une règle de développement A(B+C) → AB+AC et une règle de factorisation AB+AC → A(B+C). Un raisonnement algébrique est principalement présenté par une succession d'étapes de calcul dont chacune est produite à partir de la précédente en appliquant plusieurs règles de réécriture. Par exemple, le passage de l'étape $2x(3x^2\text{-}4)$ à l'étape $6x^3\text{-}8x$ peut être produit par l'application de la règle de développement ci-dessus et de règles de réduction.

Lorsqu'un élève résout un exercice d'algèbre formelle, il produit aussi des étapes de calcul. Notre modèle cherche à interpréter ces productions d'étapes par l'application de règles de réécriture correctes ou erronées, à l'instar d'Anderson et al. [1990]. Par exemple, si l'élève est passé de $2x(3x^2\text{-}4)$ à $6x^3\text{-}4$, nous pouvons interpréter cette transformation par l'application de la règle~~s~~ erronée A(B+C) → AB+C suivie de l'application de règles de réduction correctes.

2.2. La résolution des équations et inéquations de degré 1

La stratégie principale de résolution des équations de degré 1, consiste à développer les deux membres, le cas échéant, puis à isoler la variable en utilisant des théorèmes permettant d'effectuer des opérations sur les deux membres :

On ne change pas les solutions d'une équation en ajoutant ou en retranchant un même nombre aux deux membres de l'équation.

---

[2] ACI « Ecole et Sciences Cognitives »

On ne change pas les solutions d'une équation en multipliant ou en divisant par un même nombre non nul les deux membres de l'équation.

Ils se traduisent par les règles d' « opérations sur les deux membres » suivantes :
Règle 1: A=B → A+C=B+C *Règle 2*: A=B → A-C=B-C
Règle 3: A=B → AC=BC (C≠0) *Règle 4*: A=B → A/C=B/C (C≠0)

L'application de ces règles se combine à des réductions, ce qui donne naissance à des règles compilées plus efficaces [Anderson 1983]. La règle 1 produit la règle 5 : A+C=B → A=B-C et la règle 6 : C=B → 0=B-C. Dans ces règles, C est enlevé d'un membre pour être placé dans l'autre. Nous parlons de « mouvement », plus précisément de mouvement additif ici. A côté de ces deux règles de mouvement additif de gauche vers la droite, il faut ajouter deux règles (règles 7 et 8) de mouvement additif de droite vers la gauche.

De façon analogue, la règle 4 produit la règle 9 : AC=B → A=B/C (C≠0) et la règle 10 : C=B → 1=B/C (C≠0). Nous parlons ici de mouvement multiplicatif de C. Ces règles doivent être complétées par des règles dans lesquelles le membre de gauche est une fraction, C étant le numérateur ou un facteur du numérateur, puis par les règles semblables de droite vers la gauche.

De façon analogue, la règle 3 produit des règles de mouvement multiplicatif d'un terme pris au dénominateur.

Pour les inéquations, les règles effectuant un mouvement multiplicatif se dédoublent selon le signe de C. Par exemple, l'équivalent de la règle 9, pour la relation « < », est constitué de : AC<B → A<B/C (C>0) et AC<B → A<B/C (C<0).

On dénombre ainsi 20 *règles détaillées* pour les mouvements dans les équations et 40 pour chaque inéquation.

Nous avons présenté ci-dessus les règles de réécriture propres aux équations et aux inéquations de degré 1. Les autres règles (factorisations, développements, réductions, etc.) s'appliquent à des sous-expressions situées dans un membre ; elles ne sont pas propres aux équations et aux inéquations de degré 1.

2.3. Une règle unique de mouvement

Pour simplifier le discours, nous utilisons, ci-dessous, le terme « équation » à la place de « équation et inéquation de degré 1 ».

Le nombre très important des règles de mouvement conduit à s'interroger sur la pertinence du modèle introduit en 3.2. Un professeur ou un élève a-t-il toutes ces règles détaillées en tête lorsqu'il résout des équations ? Certainement pas sous cette forme. Analysons ces notions de mouvement pour en faire ressortir les principaux traits et envisageons en même temps des mouvements erronés.

Un mouvement additif porte sur une sous-expression que nous appelons argument : c'est l'objet qui passe d'un membre dans l'autre. L'argument est additif, ce qui signifie qu'il se trouve dans une somme située dans un membre de l'équation ou qu'il est lui-même un membre de l'équation. Quand le mouvement est effectué correctement, l'argument est encore additif, dans l'autre membre, et il a changé de signe syntaxique (le signe syntaxique provient de la présence ou non de « - » devant l'argument, par exemple : -3x a pour signe syntaxique « - »).

Un mouvement multiplicatif a aussi un argument. L'argument peut être « multiplicatif au numérateur », ce qui signifie qu'il est un facteur d'un membre de l'équation ou du numérateur d'une fraction qui est un membre de l'équation ; l'argument peut être « multiplicatif au dénominateur », ce qui signifie qu'il est un facteur du dénominateur d'une fraction qui est un membre de l'équation. Quand le mouvement est effectué correctement, l'argument est encore multiplicatif dans l'autre membre (au dénominateur s'il vient du numérateur et au numérateur s'il vient du dénominateur), il n'a pas changé de signe syntaxique, mais, dans le cas d'une inéquation, le sens de l'inéquation a changé si le signe sémantique (nombre positif ou négatif) de l'argument est négatif.

Nous pouvons maintenant décrire les mouvements avec une seule règle, intitulée *Mouvement*, auquel on associe un vecteur de sept variables, variables dont les noms sont indiqués ci-dessous, suivis des valeurs qu'elles peuvent prendre :

<u>Symbole de relation</u> : parmi (= ≠ < ≤ > ≥).

<u>Orientation horizontale du mouvement</u> : parmi (GaucheDroite DoiteGauche).

<u>Orientation verticale du mouvement</u> : parmi (NumVersNum, NumVersDeno, NumVersDeno, DenoVersNum, DenoVersDeno), « Num » signifiant numérateur et « Deno » signifiant dénominateur.

<u>Position de l'argument à l'origine</u>
- "PosOrgArgEstAdd" si la position d'origine de l'argument est additive.
- "PosOrgArgEstMult" si la position d'origine de l'argument est multiplicative.

<u>Position finale de l'argument</u>
- "PosFinaleArgEstAdd" : la position finale de l'argument est additive.
- "PosFinaleArgEstMult" : la position finale de l'argument est multiplicative.

<u>Changement de signe de l'argument</u>
- "ChangeSigneArg" : le signe de l'argument est changé lors du mouvement.
- "ChangePasSigneArg" : le signe de l'argument n'est pas changé.

<u>Changement de sens</u>
- "ChangePasSens" : le sens de l'inégalité n'est pas changé.
- "ChangeSens" : le sens de l'inégalité est changé.

Par exemple, la transformation erronée $2x-4 \leq 5 \rightarrow 2x \geq 5-4$ est représentée par un *Mouvement* de -4 de vecteur : (≤, GaucheDroite, NumVersNum, PosOrgArgEstAdd PosFinaleArgEstAdd, ChangePasSigneArg, ChangeSens). La règle détaillée correspondante peut être produite à partir du vecteur, c'est : $A+C \leq B \rightarrow A \geq B+C$.

2.4. Le Vecteur du Comportement Local

Pour chaque concept étudié, parmi les concepts entrant dans les mouvements, nous définissons un Vecteur du Comportement Local (VCL) à partir du vecteur précédent, en supprimant ou en ajoutant des variables. Le vecteur obtenu ne permet pas de reconstruire la règle détaillée, mais il est plus utile à la reconnaissance des théorèmes-en-acte relatifs au concept. Ce vecteur propose un découpage et une réorganisation des faits relevés par un observateur, il s'agit d'un niveau comportemental de la modélisation de l'élève [WENGER 1987, DILLENBOURG & SELF 1992]. Le choix des événements qui doivent être pris en compte pour ce niveau est le résultat des décisions de l'observateur, comme le souligne [BALACHEFF 1994, p. 26] « la modélisation comportementale exige donc un premier niveau d'interprétation, celui de l'organisation du réel ».

3. Théorèmes-en-actes relatifs au changement de signe

Le cadre ci-dessus permet de modéliser avec finesse une transformation d'élève de type mouvement, mais il ne permet pas de trouver les régularités dans les mouvements effectués par l'élève. C'est au niveau des thérèmes-en-acte que cette question se pose. Nous allons l'aborder maintenant, en nous restreignant au changement de signe, en essayant de déterminer dans quel contexte l'élève change le signe de l'argument dans un mouvement. Il s'agit d'interpréter les données organisées au niveau comportemental (VCL) par une fonction de diagnostic [WENGER 1987]. Ce diagnostic attribue des significations aux comportements de l'élève : c'est un niveau épistémique de la modélisation de l'élève.

3.1. Une hiérarchie de théorèmes-en-acte pour le changement de signe

Nous définissons quatre *théorèmes-en-acte globaux* pour le changement de signe :
- SigneCorrect : on effectue un traitement correct du signe de l'argument.
- ValeurAbsolue : on change le signe de l'argument si et seulement si il est négatif.
- ConservationSigne : on ne change pas le signe de l'argument (jamais).
- ChangementSigne : on change le signe de l'argument (toujours).

Puis nous définissons des théorèmes-en-acte X-y-z sur des domaines plus restreints, X étant un nom de théorèmes-en-acte global ; y étant le type de relation : eq (pour équation) ou ineq (pour inéquation) ou vide ; z étant la position d'origine de l'argument : add (pour additif) ou mult (pour multiplicatif) ou vide. Ainsi, ValeurAbsolue-eq-mult est le théorème-en-acte « on change le signe de l'argument si et seulement si il est négatif, dans le contexte des équations et des mouvements multiplicatifs ». Si l'on choisit un ordre de restriction, on peut organiser ces théorèmes-en-acte selon une hiérarchie de sommet TASigne avec les quatre *théorèmes-en-acte globaux* ci-dessus, chacune ayant des descendants comme indiqué sur la figure 1 pour ValeurAbsolue.

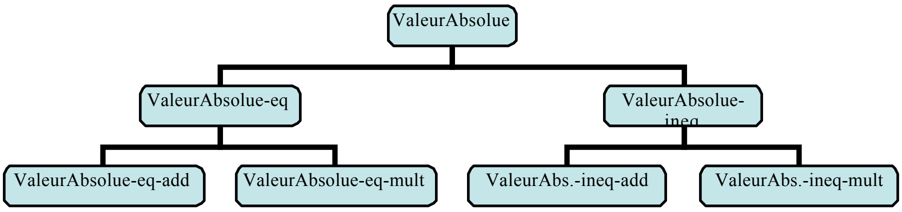

Figure 1. *Hiérarchie des théorèmes-en-acte relatifs au changement de signe.*

3.2. Un mécanisme de détermination des théorèmes-en-acte

Supposons que nous ayons des données provenant de résolutions d'exercices effectuées par un élève, données ayant été représentées, pour ce qui concerne les mouvements dans les équations et inéquations, par des VCL (cf. 2.4). Pour le changement de signe, nous définissons VCL par (Type de problème, Position de l'argument à l'origine, Signe de l'argument, Changement de signe de l'argument), la variable « Type de problème », valant équation ou inéquation, les autres variables provenant de la règle sauf « Signe de l'argument »). Les trois premières variables définissent le contexte et la dernière est l'action de l'élève relative au signe de l'argument déplacé. Cette première étape consiste donc à spécifier le contexte et l'action pertinents pour la détermination des théorèmes-en-acte relatifs au signe de l'argument déplacé. On appelle le vecteur formé par le contexte et l'action spécifiés pour le signe, vecteur de comportement local pertinent, noté VCLP, pour le signe. Dans la suite du diagnostic, on ne travaille qu'avec les VCLP pour construire les théorèmes-en-acte selon un principe de généralisation que nous illustrons plus loin à travers le cas du théorème-en-acte ValeurAbsolue.

On détermine tous les contextes et, pour chacun d'eux, par exemple (equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstPlus), on dénombre les VCLP qui entrent dans le contexte. On obtient n VCLP dont n_1 avec ChangePasSigneArg et n_2 avec ChangeSigneArg.

Nous attribuons trois statuts aux données par rapport à un contexte :
- insuffisantes si $n \leq 3$
- suffisantes-instables si $n \geq 4$ et ($n_1/n \leq 0.75$ et $n_2/n \leq 0.75$).
- suffisantes-stables si $n \geq 4$ et ($n_1/n \geq 0.75$ ou $n_2/n \geq 0.75$).

Dans le premier cas, nous n'avons pas suffisamment de données pour produire un diagnostic sur les connaissances de l'élève. Dans le deuxième cas, nous avons des données significatives, mais elles ne permettent pas de déterminer une corrélation entre le contexte et les actions. Enfin, le troisième cas nous permet de faire l'hypothèse d'une certaine stabilité du comportement de l'élève et on peut donc déduire une corrélation entre le contexte et l'action dont le nombre d'occurrences est le plus grand. Par exemple, si pour le contexte (equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstPlus) on a des données suffisantes-stables avec n_2 majoritaire, on a une corrélation entre ce contexte et l'action ChangeSigneArg, et on considère (equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstPlus, ChangeSigneArg) comme un comportement pertinent pour le diagnostic des théorèmes-en-acte, car il exprime une régularité dans le comportement de l'élève. En fait ce comportement pertinent diagnostiqué est une règle d'action, au sens défini plus haut.

Exemple de principe de généralisation : ce qui est fondamental pour ValeurAbsolue, c'est la corrélation entre "SigneArgEstPlus" et "ChangePasSigneArg", d'une part, et "SigneArg-EstMoins" et "ChangeSigneArg", d'autre part. Ainsi, si l'on a les deux VCLP : (equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstPlus, ChangePasSigneArg) et (equation, PosOrgArgEstAdd, SigneArgEstMoins, ChangeSigneArg), on diagnostique ValeurAbsolue-eq-add. De même, si l'on a la situation analogue avec Mult au lieu de Add, on diagnostique ValeurAbsolue-eq-Mult. On étudie ainsi toutes les feuilles de l'arbre des théorèmes-en-acte de la figure 1, en marquant celles qui sont diagnostiquées, puis on généralise en marquant un nœud chaque fois que tous ses descendants sont marqués.

Il faut noter que les quatre théorèmes-en-acte globaux ne sont pas disjoints, un diagnostic pour un élève peut être : ValeurAbsolue-add et ConservationSigne-mult.

4. Etude expérimentale

Nous avons mis en place des expérimentations pour déterminer les théorèmes-en-acte des élèves relatives au changement de signe dans les équations, selon le modèle décrit ci-dessus. Les exercices ont porté sur des équations et inéquations dont la résolution nécessite des mouvements additifs et multiplicatifs d'arguments qui peuvent être de signe "+" ou "–". Pour ne pas mettre les élèves en difficulté sur des tâches qui ne concernent pas directement les théorèmes-en-acte sur les mouvements, nous avons choisi des exercices avec des coefficients entiers et avec des développements simples.

Les expérimentations ont été réalisées à l'aide du logiciel Aplusix[3] [Nicaud et al. 2004] qui permet à l'élève de produire les calculs de son choix, grâce à un éditeur avancé d'expressions algébriques. Après une phase de familiarisation, les élèves ont utilisé le logiciel en mode « Test » dans lequel ils sont privés des rétroactions (en mode « Exercice », le logiciel indique si les calculs sont corrects ou non). Aplusix enregistre les actions des élèves, ce qui fournit des données pour des études en laboratoire.

Dans une expérimentation mise en place dans une classe de seconde en France, au mois de mars 2003, nous avons proposé un nombre d'exercices suffisant pour pouvoir vérifier les stabilités des comportements des élèves. Ainsi, dans le test, il y avait 12 équations et 12 inéquations à résoudre. Pour chacune d'elles, nous avons déterminé le nombre et le signe du terme à déplacer selon la nature du mouvement. Par exemple, pour l'équation $x - 1 = 3x + 5$, nous avons a priori un mouvement additif d'un terme de signe "–", un autre d'un terme de signe "+" et un mouvement

[3] http://aplusix.imag.fr

multiplicatif d'un terme de signe "–". Bien entendu, l'élève peut faire plus de mouvements en déplaçant un terme d'un membre à l'autre plusieurs fois.

Une expérimentation analogue a été mise en place au Brésil auprès de 32 classes de Quatrième, environ 1340 élèves âgés de 13-14 ans. Nous avons fait deux tests en deux séances différentes : le premier sur les équations de degré 1 et le deuxième sur les inéquations du degré 1. Chaque test avait 16 exercices dont les caractéristiques étaient les mêmes que celles de l'expérimentation réalisée en France.

L'analyse des données a été faite en 4 étapes.

Diagnostic local. Cette étape consiste, pour chaque transformation A → B effectuée par l'élève, à rechercher une suite de règles plausibles dont l'application fait passer de A à B (pendant l'utilisation d'Aplusix, les transformations sont matérialisées comme indiqué sur la figure 2). Pour cela, une base de règles correctes et erronées a été mise en place (contenant la règle unique de mouvement, cf. 2.3) et un interpréteur de règles a été réalisé. Le diagnostic lui-même s'effectue à l'aide d'un logiciel développé spécifiquement, appelé Anaïs, selon une technique de recherche heuristique [Pearl 1984], en développant un arbre d'expressions pouvant être produites à partir de A jusqu'à ce que l'on atteigne B ; à chaque instant, le choix du nœud sur lequel on applique toutes les règles possibles étant réalisé par une heuristique.

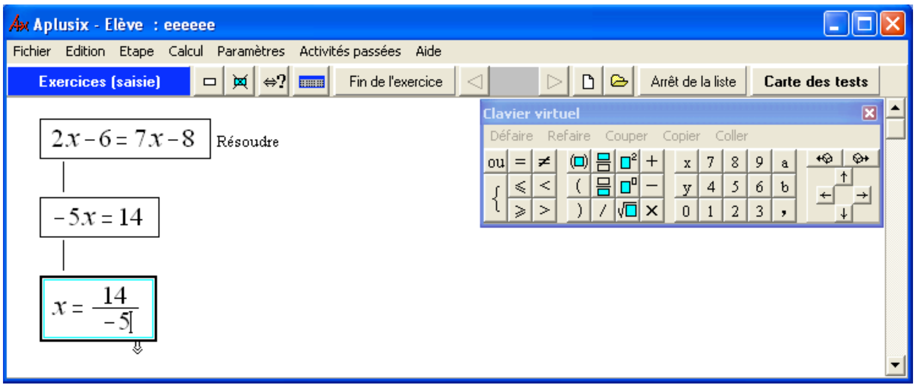

Figure 2. *Copie d'écran d'Aplusix. L'élève résout une équation en plusieurs étapes.*

Par exemple, la transformation 2x-6=7x-8 → -5x=-14 est diagnostiquée par l'application de quatre règles :

Mouvement additif de -6 sans changer de signe (erroné)
Mouvement additif de 7x en changeant de signe (correct)
Groupement additif 2x-7x → -5x (correct)
Somme de 2 entiers -8-6 → -14 (correct)

Calcul des occurrences des contextes. Il s'agit des contextes de changement de signe dans les mouvements. Ce calcul a été effectué de façon automatique par le logiciel Anaïs qui a pris chaque règle de mouvement apparaissant dans un diagnostic local et l'a comptabilisée dans le contexte qui lui est adapté (cf. 3.2).

Détermination automatique des VCLP.

Détermination automatique des théorèmes-en-acte et généralisation.

Le tableau 1 donne les diagnostics obtenus pour la classe de seconde de France et trois classes du Brésil (les autres classes du Brésil sont en cours d'analyse).

Le nombre de données insuffisantes est très élevé dans les deux classes 8A et 8B du Brésil. Cela est dû à des difficultés techniques au début de l'expérimentation, ce qui n'a pas laissé beaucoup de temps aux élèves de faire suffisamment d'exercices.

	8A Brésil	8B Brésil	8C Brésil	Seconde France
Nombre d'élèves	35	31	27	27
Données Insuffisantes	16	19	5	2
Données Instables	8	5	2	0
SigneCorrect	2	3	7	23
SigneCorrect-add	1	0	0	1
SigneCorrect-eq	4	2	2	0
SigneCorrect-eq-add	4	2	7	0
ValeurAbsolue			1	1
ConservationSigne			1	
ConservationSigne-ineq-add			2	

Tableau 1. *Résultats des calculs de* théorèmes-en-acte *pour le changement de signe.*

Dans les deux 8C et Seconde, le nombre de données stables est très important. Le tableau 1 montre des différences entre ces deux classes quant aux théorèmes-en-acte relatives aux signes. Ainsi près de 85% des élèves de la classe de Seconde ont un théorème-en-acte correct contre 25% des élèves de la classe 8C. Pour cette dernière, on peut dire que le cas des mouvements additifs dans les équations est bien réussi par 16 élèves, soit 60%.

Au-delà de ces données quantitatives, on a un diagnostic pour chaque élève et donc, quand les théorèmes-en-acte diagnostiqués pour un élève sont incorrects, on peut apporter une remédiation adéquate en terme de situation d'apprentissage (situations faisant apparaître ce qui pose problème). La réalisation de ces ingénieries d'apprentissage est en cours.

5. Conclusion

La modélisation des connaissances de l'élève occupe une place importante dans les recherches en AI-ED et en didactique des mathématiques. Pour certains domaines, le processus de diagnostic présente une certaine complexité, car il exige un découpage et une réorganisation des productions de l'élève puis une interprétation dans le modèle utilisé. Dans cet article, nous avons présenté un travail de modélisation des élèves en algèbre et montré en quoi les deux environnements informatiques Aplusix, pour le recueil des données, et Anaïs, pour leurs traitements, fournissent un diagnostic automatique des théorèmes-en-acte.

L'élaboration du modèle proposé a pris en compte deux préoccupations : l'une d'ordre didactique, en se plaçant dans un certain paradigme d'apprentissage, et l'autre d'ordre informatique, en imposant un modèle computationnel. Il faut noter que le modèle a été élaboré avec un niveau de granularité plus fin que lorsque l'on effectue une détermination totalement manuelle des théorèmes-en-acte

Les résultats que nous avons obtenus sur les classes étudiées sont intéressants : la raison des données insuffisantes des deux premières classes a été trouvée ; la répartition des théorèmes-en-acte des deux autres classes montre que le modèle permet d'effectuer une classification. L'analyse d'autres classes a montré que modèle a le même effet sur des données plus nombreuses.

La question principale que nous nous posions était la suivante : « Est-ce que le modèle que nous avions construit, de façon abstraite, pouvait être mis en œuvre de façon automatique et produire une discrimination significative entre les élèves ? ». La réponse est oui. L'automatisation du diagnostic, sur un plus grand nombre de données, a confirmé nos premiers résultats.

6. Bibliographie

[Anderson 1983] Anderson J. R., *The Architecture of Cognition*. Harward University Press.

[Anderson et al. 1990] Anderson J.R., Boyle C. F., Corbett A. T., Lewis M. W., *Cognitive Modeling and Intelligent Tutoring*. Artificial Intelligence, Vol 42, no 1.

[Artigue 1988] Artigue M., Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.9 n°3, pp.281-308.

[Artigue et Robinet 1982] Artigue M. et Robinet J., Conception du cercle chez des enfants de l'école élémentaire. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 3(2) 5-64.

[Balacheff 1995] Balacheff N., Conception, connaissance et concept. In Denise Grenier (ed.) *Séminaire Didactique et Technologies cognitives en mathématiques* (pp.219-244). Grenoble. IMAG.

[Balacheff 2000] Balacheff N., Les connaissances, pluralité de conceptions (le cas des mathématiques). In : Tchounikine P.(ed.) *Actes de la conférence Ingénierie de la connaissance* (IC 2000, pp.83-90). Toulouse.

[Brousseau 1986] Brousseau G., Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2) 5-64.

[Chaachoua et Lima 2003] Chaachoua H., Lima I., De la modélisation des conceptions des élèves à la prise de décisions didactiques par l'enseignant : le rôle d'un environnement informatique. Actes *du colloque ITEM 2003*, Reims, 20-22 juin 2003

[Dershowitz et Jouannaud 1989] Dershowitz N, Jouannaud J.P., Rewrite Systems. In *Handbook of Theoretical Computer Science*, Vol B, Chap 15. North-Holland.

[Dillenbourg et Self 1992] Dillenbourg P. et Self J., *A framework for student modelling*. Interactive Learning Environment, 2 (2).

[Nicaud et al. 2004] Nicaud, J.F., Bouhineau, D., and Chaachoua H., Mixing microworld and CAS features in building computer systems that help students learn algebra, in *International Journal of Computers for Mathematical Learning*, Volume 9, Issue 2, Springer-Verlag

[Pearl 1984] Pearl J., *Heuristics*. Addison-Wesley, London.

[Tahri 1993] Tahri S., *Modélisation de l'interaction didactique : un tuteur hybride sur Cabri-géomètre pour l'analyse des décisions didactiques*. Thèse. Grenoble : Université Joseph Fourier.

[Vergnaud 1991] Vergnaud G., La théorie des champs conceptuels, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, vol.10 n°2-3, pp.133-169

[Vergnaud 2001] Vergnaud G., Forme opératoire et forme prédicative de la connaissance, Conférence publiée dans les Actes du Colloque GDM-2001Jean Portugais (Ed)La notion de compétence en enseignement des mathématiques, analysedidactique des effets de son introduction sur les pratiques et sur la formation.

[Wenger 1987] Wenger E., *Artificial Intelligence and Tutoring Systems*. Los Altos : Morgan Kaufmann Pub. Inc.